Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **20 de Enero de 2016**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

(1) **Sea la función** $f(x) = x^2 \ln x$**. Se pide:**

(a) Representar gráficamente la función, calculando previamente su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas, extremos globales (si los hay) e imagen de $f(x)$.

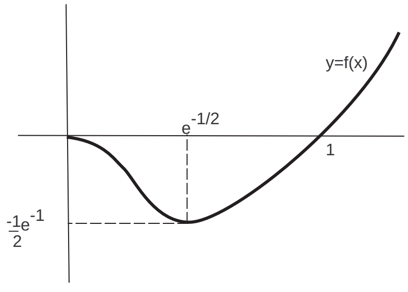
(b) Considerar la función $f_1(x) = f(x)$ (definida solo en el intervalo en el que $f(x)$ es creciente). Hallar el dominio y la imagen, concavidad y/o convexidad y dibujar la gráfica de la función $f_1^{-1}(x)$. Sugerencia: para la concavidad y/o convexidad de $f_1^{-1}(x)$, estudiar primero la concavidad/convexidad de f_1. No intentar hallar la expresión analítica de $f_1^{-1}(x)$.

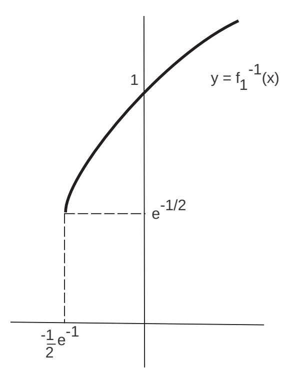
0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) El dominio de la función anterior es $\{x : x > 0\} = (0, \infty)$.
Además, como $f\,'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$, se deduce que f es decreciente en $(0, e^{-1/2}]$ y creciente en $[e^{-1/2}, \infty)$, pues $1 + 2\ln(x) = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-1/2}$ y, como el logaritmo es creciente, $1 + 2\ln(x) < 0$ si $x < e^{-1/2}$ (o, equivalentemente, $f\,'(x) < 0$ en dicho intervalo); y $1 + 2\ln(x) > 0$ si $x > e^{-1/2}$ (o, equivalentemente, $f\,'(x) > 0$ en dicho intervalo).

Como la función es continua en su dominio, solo hay que estudiar la posible asíntota vertical en 0^+ :
$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln(x)}{1/x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1/x}{-2/x^3} = 0$; luego la función no tiene asíntotas verticales. Estudiemos a continuación el comportamiento de la función en ∞ :
$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$; luego la función no tiene asíntota horizontal ni oblicua.
Por lo tanto, la función alcanzará un mínimo global en $x = e^{-1/2}$, y su valor será:
$f(e^{-1/2}) = e^{-1} \ln(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2}e^{-1}$. Luego la imagen de la función será: $[-\frac{1}{2}e^{-1}, \infty)$.
Por lo tanto, la gráfica de f tendrá un aspecto, aproximadamente, como el de la primera figura:





b) Hemos definido $f = f_1 : [e^{-1/2}, \infty) \longrightarrow [-\frac{1}{2}e^{-1}, \infty)$, que es creciente y biyectiva.
Luego $f_1^{-1} : [-\frac{1}{2}e^{-1}, \infty) \longrightarrow [e^{-1/2}, \infty)$ es también creciente y biyectiva.
Por otro lado, f_1 es convexa, pues $f"(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3$,
y, como $f"(x)$ es creciente, si $x > e^{-1/2} \Longrightarrow f"(x) > 2 \ln e^{-1/2} + 3 = 2 > 0$.
Como f_1 es convexa y creciente, se deduce que $f_1^{-1}(x)$ es cóncava y creciente.
Por lo tanto, la gráfica de f_1^{-1} será, aproximadamente, como el de la segunda figura.

(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación**

$4x^2 + y^2 + y^6 = 2$ **en un entorno del punto** $x = 0, y = 1$, **se pide:**

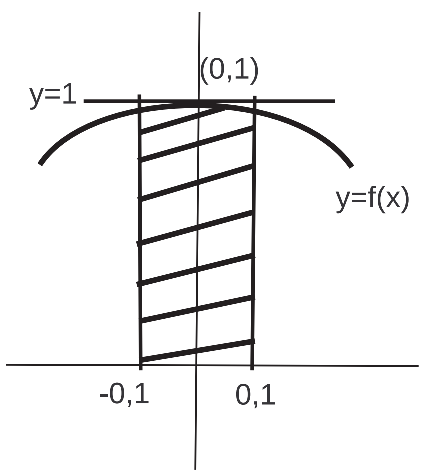
(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $a = 0$, y probar que $f(x)$ es cóncava cerca de dicho punto.

(b) Representar la función cerca de $a = 0$ y calcular aproximadamente el área limitada por la gráfica de dicha función, el eje horizontal, y las rectas verticales $x = -\delta, x = \delta$, para $\delta > 0$ pequeño.
¿Es dicha aproximación por defecto o por exceso?
Sugerencia para b: si no se ha hallado la recta tangente, considerese $y = 1 + mx$.
1 punto

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$8x + 2yy' + 6y^5y' = 8x + (2y + 6y^5)y' = 0$
sustituyendo $x = 0, y(0) = 1$ se deduce que $y'(0) = f\ '(0) = 0$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$8 + (2y' + 30y^4y')y' + (2y + 6y^5)y" = 0$
sustituyendo $y(0) = 1, y'(0) = 0$ se deduce que $y"(0) = f\ "(0) = -1$
Luego la ecuación de la recta tangente será:
$y - 1 = 0(x - 0)$, es decir, $y = 1$.
Y, obviamente, la función implícita es cóncava pues $f\ "(0) < 0$.
.

b) Como la gráfica de f quedará debajo de la recta tangente $y = 1$, la representación será, cerca del punto $x = 0$, aproximadamente así, tomando $\delta = 0,1$:



Y, como la función es positiva cerca del punto $x = 0$, el área coincidirá con la integral $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx$, que será, aproximadamente, la misma que sustituir $f(x)$ por la recta tangente $y = 1$. Es decir, $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) \approx \int_{-\delta}^{\delta} 1.dx = 2\delta$.
Como la función es cóncava, la gráfica queda debajo de la recta tangente, luego la aproximación es por exceso.
Observación: si se tomó como recta tangente $y = 1 + mx$, el resultado no varía, pues el área de un rectángulo de base 2δ y altura 1 es la misma que la de un trapecio de misma base y altura media 1.

(3) **Sea** $C'(x) = 0,04x + 2$ **y** $I'(x) = -0,16x + 102$ **las funciones de costes e ingresos marginales de una empresa monopolista, siendo** $x \geqslant 0$ **el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:**

(a) Determinar la producción que maximiza el beneficio. Para este nivel de producción, ¿cual será el beneficio adicional (aproximado) de producir una unidad menos?

(b) Sabiendo que el coste de producir 100 unidades es de 600 unidades monetarias, hallar la producción que minimiza el coste medio. Para este nivel de producción, ¿cual será el beneficio adicional (aproximado) de producir una unidad más?

0,4 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b)

---

a) Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = I'(x) - C'(x) = -0,16x + 102 - (0,04x + 2) = -0,2x + 100; B"(x) = -0,2 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x = 500$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
A este nivel de producción el beneficio adicional de producir una unidad de más o menos sería, aproximadamente, 0, pues
$B(501) - B(500) \approx B'(500) = 0$, $B(500) - B(499) \approx B'(500) = 0$.
.

b) La función de costes es $C(x) = 0,02x^2 + 2x + C_0$.
Como $C(100) = 0,02 \cdot 100^2 + 2 \cdot 100 + C_0 = 600 \Longrightarrow C_0 = 200$,
luego la función de coste medio es $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{200}{x} + 2 + 0,02x$.
Si calculamos su dos primeras derivadas:
$C'_m(x) = \dfrac{-200}{x^2} + 0,02; C"_m(x) = \dfrac{400}{x^3} > 0$
observamos que $x = \sqrt{\dfrac{200}{0,02}} = 100$ es el único punto crítico y, como $C_m(x)$ es una función convexa, dicho punto crítico es el único minimizador global.
Por lo tanto, la producción que minimiza el coste medio será: $x = 100$.
Para este nivel de producción, el beneficio adicional de producir una unidad más sería, aproximadamente, 80, pues:
$B(101) - B(100) \approx B'(100) = -20 + 100 = 80$

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 1, 2 Y 3

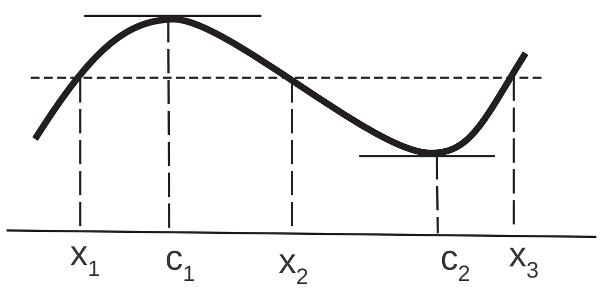
4. **Sea la función $f(x) = xe^x$. Se pide:**

(a) Enunciar el teorema de Rolle y utilizarlo para demostrar que no pueden existir tres puntos distintos $x_1 < x_2 < x_3$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$.
¿Qué sucede si sustituimos $f(x)$ por una función convexa y derivable $g(x)$?
Sugerencia: aplicar el teorema de Rolle a dos intervalos distintos.
Además, en este problema, como en todos, convexidad siempre es en sentido estricto.

(b) Estudiar si $f(x)$ es convexa, hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x)$ en $a = 0$ y calcular el valor aproximado de $f(\frac{1}{4})$.
0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Aplicando el teorema de Rolle a f en el intervalo $[x_1, x_2]$, se deduce la existencia de $c_1 \in (x_1, x_2)$ tal que $f\,'(c_1) = 0$.
Aplicando el teorema de Rolle a f en el intervalo $[x_2, x_3]$, se deduce la existencia de $c_2 \in (x_2, x_3)$ tal que $f\,'(c_2) = 0$.
Como $f\,'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$, el único cero de la función $f\,'$es $x = -1$.
Así pues, f solo puede tomar el mismo valor dos veces.
Análogamente, una función convexa solo puede tener un punto crítico, luego tampoco pueden existir tres puntos distintos $x_1 < x_2 < x_3$ tales que $g\ (x_1) = g(x_2) = g(x_3)$.
La situación de una función que tomase tres veces el mismo valor puede representarse, aproximadamente, así:



b) Como $f"(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$, se deduce que $f(x)$ no es convexa en $(-\infty, -2)$.
Además, como $f(0) = 0, f\,'(0) = 1, f"(0) = 2$,
se deduce que $P(x) = x + x^2$.
Por lo tanto: $f(\frac{1}{4}) \approx P(\frac{1}{4}) = 5/16$.

5. **Sea el conjunto** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - |x|)\}$. **Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

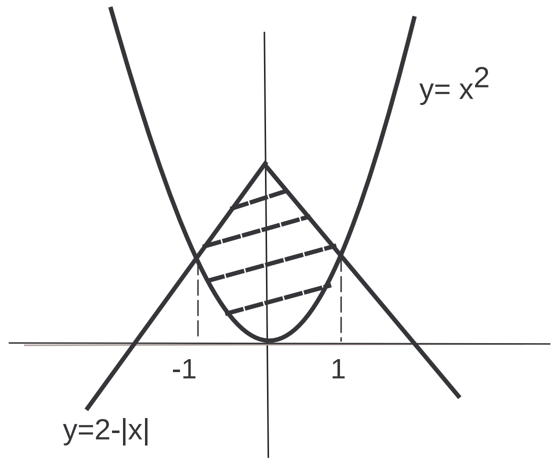
(b) Calcular el área del conjunto dado. ¿Y el área de $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 \leq y \leq 3 - |x|)\}$?

Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) Como el conjunto A es simétrico respecto del eje vertical, es suficiente describirlo cuando $x \geqslant 0$. Para dichos valores, $(x, y) \in A$ cuando
$f(x) = x^2 \leq y \leq 2 - x = g(x)$.
Las gráficas de ambas funciones $y = x^2, y = 2 - x$ se cortan en $x = 1$.
Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, así:



Por lo tanto, como $g(x)$ es decreciente en $[0, 1]$ y $f(x)$ tambien decrece en $[-1, 0]$, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
$máximo(A)$ no existe, $\{\text{maximales}(A)\} = \{(x, 2 - x) : 0 \leq x \leq 1\}$.
$mínimo(A)$ no existe, $\{\text{minimales}(A)\} = \{(x, x^2) : -1 \leq x \leq 0\}$.

b) Como ya hemos dicho, basta con hallar el área de la parte del conjunto que queda a la derecha del eje vertical. Así pues,
$A = 2\int_0^1 (g(x) - f(x))dx = 2\int_0^1 (2 - x - x^2)dx = 2[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^1 =$
$= \frac{7}{3}$ unidades de área.
Por otro lado, B no es sino una traslación vertical de una unidad del conjunto A, luego el área de B es la misma que la de A.

6. **Dada la función** $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, **si** $x > 0$, **se pide:**

(a) Hallar la primitiva de $f(x)$ que tome el valor 0 en $x = 1$.

(b) Sea g continua tal que $g(x) \geqslant 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ si $x \geqslant 1$.

Calcular las asíntotas, si existen de la función $G(x) = \int\limits_1^x g(t)dt$.

Sugerencia para b: en primer lugar, comprobar que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} G(x) = \infty$.

1 punto

---

a) Sea $F(x) = \int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ la primitiva general de $f(x)$.

Haciendo el cambio de variable $x = t^2, dx = 2tdt$, se obitene que:

$\int \dfrac{e^t}{t} 2tdt = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$

Y ahora, como $F(1) = 2e + C = 0 \Longrightarrow C = -2e$.

Por lo tanto, $F(x) = 2e^{\sqrt{x}} - 2e$.

.

b) Como $g(x) \geqslant 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ cuando $x \geqslant 1 \Longrightarrow G(x) = \int\limits_1^x g(t)dt \geqslant \int\limits_1^x (1 + \frac{1}{2}\sqrt{t})dt \geqslant x - 1 \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow \infty$, por tanto $G(x)$ no puede tener asíntota horizontal.

Como tampoco puede tener asíntota vertical, pues $G(x)$ es continua en su dominio, solo queda comprobar que no tiene asíntota oblícua. Y como

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{G(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ =(aplicando L'Hopital)= $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{G'(x)}{1} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} g(x) = \infty$

Luego tampoco tiene asíntotas oblícuas.

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 4, 5 Y 6