Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **20 de Enero de 2015**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{1+2x}$**. Se pide:**

(a) Representar gráficamente la función, calculando previamente su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas e imagen de $f(x)$.

(b) Considerar las funciones $f_1(x) = f(x)$ (definida solo en el intervalo en el que $f(x)$ es creciente) y $f_2(x) = f(x)$ (definida solo en el intervalo en el que $f(x)$ es decreciente).
Hallar los dominios e imágenes de las funciones $f_1^{-1}(x)$ y $f_2^{-1}(x)$, y dibujar sus gráficas.
Sugerencia: no intentar hallar las expresiones analíticas de $f_1^{-1}(x)$ ni de $f_2^{-1}(x)$.
1 punto

---

a) El dominio de la función anterior es $\{x : 1+2x > 0\} = (-\frac{1}{2}, \infty)$. Además, como
$f\,'(x) = \dfrac{2(1+2x)/(1+2x) - 2\ln(1+2x)}{(1+2x)^2} = \dfrac{2}{(1+2x)^2}(1-\ln(1+2x))$,
se deduce que f es creciente en $(-\frac{1}{2}, (e-1)/2]$ y decreciente en $[(e-1)/2, \infty)$, pues
$1-\ln(1+2x) = 0 \Longleftrightarrow 1+2x = e \Longleftrightarrow x = (e-1)/2$ y, como el logaritmo es creciente,
$\ln(1+2x) < 1$ si $x < (e-1)/2$ (o, equivalentemente, $f\,'(x) > 0$ en dicho intervalo); y
$\ln(1+2x) > 1$ si $x > (e-1)/2$ (o, equivalentemente, $f\,'(x) < 0$ en dicho intervalo).

Como la función es continua en todo su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en $-\frac{1}{2}^+$ y en ∞.

$\lim\limits_{x\longrightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$; luego la función tiene una asíntota vertical en $-\frac{1}{2}^+$.

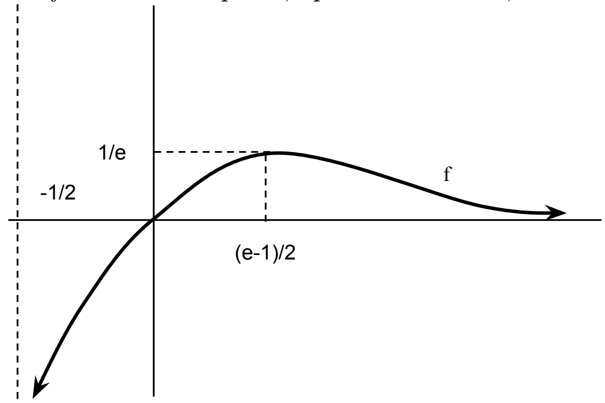
$\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\ln(1+2x)}{1+2x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ =(aplicando L'Hopital)=

$= \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2/(1+2x)}{2} = 0$; luego la función tiene asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.

Por lo tanto, la función alcanzará un máximo global en $x = (e-1)/2$, y su valor será:
$f((e-1)/2) = \dfrac{\ln(1+e-1)}{1+e-1} = 1/e$

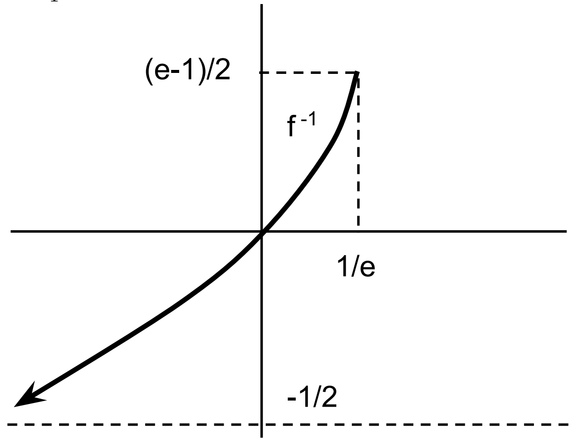
Luego la imagen de la función será: $(-\infty, 1/e]$.

Por lo tanto, la gráfica de f tendrá un aspecto, aproximadamente, así:

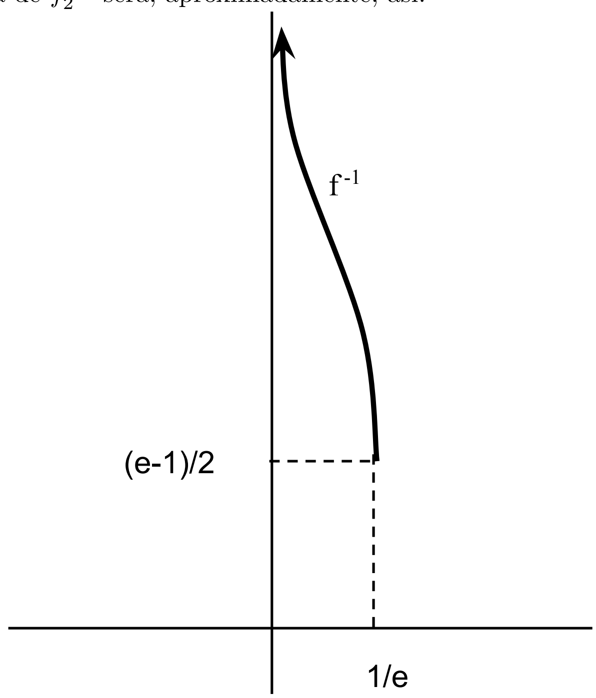


b) Hemos visto que $f = f_1 : (-\frac{1}{2}, (e-1)/2] \longrightarrow (-\infty, 1/e]$ es creciente y biyectiva. Luego $f_1^{-1} : (-\infty, 1/e] \longrightarrow (-\frac{1}{2}, (e-1)/2]$ es también creciente y biyectiva.

Por lo tanto, la gráfica de f_1^{-1} será, aproximadamente, así:



Análogamente, sabemos que $f = f_2 : [(e-1)/2, \infty) \longrightarrow (0, 1/e]$ es decreciente y biyectiva. Luego $f_2^{-1} : (0, 1/e] \longrightarrow [(e-1)/2, \infty)$ es decreciente y biyectiva.
Por lo tanto, la gráfica de f_2^{-1} será, aproximadamente, así:



(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $y + e^{x+y} = 0$ en un entorno del punto $x = 1, y = -1$, se pide:**

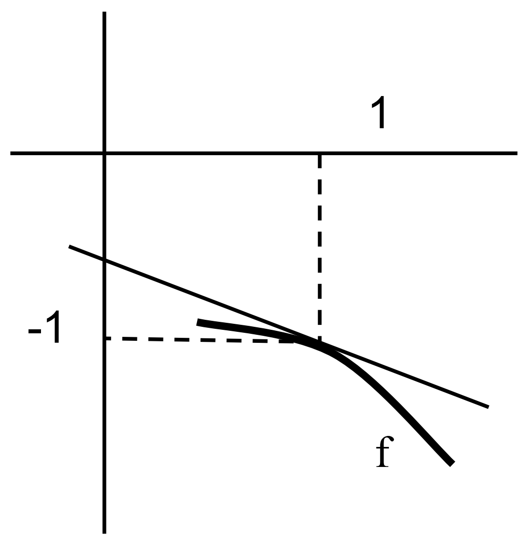
(a) Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x)$, centrado en $a = 1$, y utilizarlo para obtener una aproximación del valor de $f(0,9)$. (*Nota:* Puedes dejar indicado el valor de f(0,9))

(b) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en el punto $x = 1$ y dibujar de forma aproximada la gráfica de f cerca del punto $x = 1$.
Sugerencia para b : para representar f solo es necesario utilizar el hecho de que $f\,'(1) < 0$, $f"(1) < 0$.
1 punto

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera y segunda de la función:
$y' + e^{x+y}(1 + y') = 0$
$y" + e^{x+y}(1 + y')^2 + e^{x+y}y" = 0$
A continuación, sustituimos en el punto $x = 1, y = -1$ y obtenemos que:
$f(1) = -1$ (enunciado del problema), $f\,'(1) = -\frac{1}{2}, f"(1) = -\frac{1}{8}$
Luego el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a = 1$, será:
$P(x) = -1 - \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{16}(x - 1)^2$.
Por lo tanto, tenemos que $f(0,9) \approx P(0,9) = -1 + \dfrac{1}{2}(0,1) - \dfrac{1}{16}(0,1)^2$.
.

b) La ecuación de la recta tangente será: $y = -1 - \frac{1}{2}(x - 1)$.Además, como $f"(1) < 0$, la función f es cóncava cerca del punto $x = 1$.
Por lo tanto, la gráfica de f quedará debajo de la recta tangente y será, cerca del punto $x = 1$, aproximadamente así:



(3) **Sea $C(x) = C_0 + 40x + 0,04x^2$ la función de costes de una empresa monopolista, siendo $C_0 > 0$ los costes fijos y $x \geqslant 0$ el número de unidades producidas de cierta mercancía.**

La función inversa de demanda, es decir, la que indica el precio por unidad vendida, viene dado por la función $p(x) = 60 - 0,06x$. Se pide:

(a) Determinar el precio p que maximiza el beneficio, justificando por qué es un máximo.

(b) Determinar el valor de C_0 para el cual se cumple que la producción que maximiza el beneficio coincide con la producción que minimiza el coste medio.
¿Cual es el beneficio en este caso?¿Cual es el coste medio?
1 punto

---

a) La función de beneficios es $B(x) = p(x)x - C(x) = 60x - 0,06x^2 - (C_0 + 40x + 0,04x^2) = -0,1x^2 + 20x - C_0$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -0,2x + 20; B"(x) = -0,2 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x = 100$ y que B es una función cóncava, por lo que este punto crítico es el único maximizador global.
A este nivel de producción le corresponde el precio $p(100) = 60 - 0,06.100 = 54$
.

b) La función de coste medio es $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{C_0}{x} + 40 + 0,04x$. Si calculamos su dos primeras derivadas:
$C'_m(x) = \dfrac{-C_0}{x^2} + 0,04; C"_m(x) = \dfrac{2C_0}{x^3} > 0$
luego observamos que $x = \sqrt{\dfrac{C_0}{0,04}}$ es el único punto crítico y, como $C_m(x)$ es una función convexa, dicho punto crítico es el único minimizador global.
Por lo tanto, la producción que maximiza el beneficio coincide con la que minimiza el coste medio cuando:
$\sqrt{\dfrac{C_0}{0,04}} = 100$, es decir, cuando $C_0 = 0,04.100^2 = 400$.
Para este valor de C_0 el beneficio obtenido cuando la producción $x = 100$ es de:
$B(100) = -0,1.100^2 + 20.100 - 400 = 600$.
Y, para dicho valor de C_0 el coste medio cuando la producción $x = 100$ es de:
$\dfrac{C(100)}{100} = 4 + 40 + 4 = 48$

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 1, 2 Y 3

4. **Sea** $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, **continua en** $[\mathbf{0},\mathbf{3}]$ **y derivable dos veces en el intervalo** $(0,3)$, **tal que** $\mathbf{f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8}$. **Se pide:**

   (a) Demostrar que existen $c_1 \in (0,1)$ tal que $f\,'(c_1) = 1$ y $c_2 \in (2,3)$ tal que $f\,'(c_2) = 4$.

   (b) Demostrar que existe $c_3 \in [0,3]$ tal que $1 < f\,''(c_3) < 3$.
   Sugerencia para b: aplicar el teorema del valor medio (o de Lagrange) a la función e intervalo adecuados, y acotar inferior y superiormente $c_2 - c_1$.
   1 punto

---

a) Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[0,1]$, se deduce la existencia de $c_1 \in (0,1)$ tal que
$f\,'(c_1) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$
Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[2,3]$, se deduce la existencia de $c_2 \in (2,3)$ tal que
$f\,'(c_2) = \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 4$
.

b) Aplicando el teorema del valor medio a $f\,'$en el intervalo $[c_1, c_2]$, se deduce la existencia de $c_3 \in (c_1, c_2)$ tal que
$f\,''(c_3) = \dfrac{f\,'(c_2) - f\,'(c_1)}{c_2 - c_1} = \dfrac{3}{c_2 - c_1}.$
Y ahora, teniendo en cuenta que $c_1 \in (0,1), c_2 \in (2,3)$, se deduce que $1 < c_2 - c_1 < 3$
lo que implica que: $\frac{1}{3} < \dfrac{1}{c_2 - c_1} < 1 \Longrightarrow 1 < \dfrac{3}{c_2 - c_1} < 3.$
Es decir, $1 < f\,''(c_3) < 3.$

5. **Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$, siendo $f(x)$ una función creciente y convexa en el intervalo $[2, 4]$ que cumple $f(2) = 5$, $f\,'(2) = 3$, $f(4) = 12$. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular la mejor estimación por exceso y por defecto del área del recinto anterior.

Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

Sugerencia 1 para b: la diferencia entre ambas estimaciones es de una unidad de área.

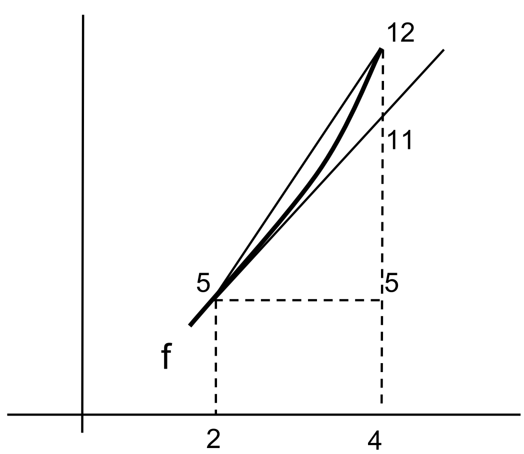
Sugerencia 2 para b: dibujar la gráfica de la función, junto con la recta tangente en el punto $x = 2$ y el segmento que une los puntos $(2, f(2))$ y $(4, f(4))$.

1 punto

---

a) Como la gráfica va a ser dibujada con más precisión en el apartado b), aquí solo necesitamos el hecho de que la función es positiva y creciente en el intervalo $[2, 4]$.
Por lo tanto:
$\{máximo(A)\} = \{(4, f(4))\} = \{\text{maximales}(A)\}$.
$\{mínimo(A)\} = \{(2, 0)\} = \{\text{minimales}(A)\}$.
.

b) En primer lugar, observamos que la gráfica de la función, por ser convexa, queda por encima de la recta tangente a dicha gráfica en el punto $(2, f(2))$.
Por lo tanto, el área solicitada será superior al rectángulo de base [2,4] y altura 5, junto al triangulo recto situado encima de dicho rectángulo y cuya altura es el segmento comprendido entre los puntos $(4, 5)$ y $(4, 11)$.
Por lo tanto, tenemos que:
Area (rectángulo) + Area (triángulo)= $10 + \frac{1}{2}.2.6 = 16$ unidades área< $\int\limits_2^4 f(x)dx$
Por otro lado, observamos también que la gráfica de la función, por ser convexa, queda por debajo del segmento que une los puntos de la gráfica $(2, f(2)) = (2, 5)$ y $(4, f(4)) = (4, 12)$. Por lo tanto, el área solicitada será inferior al rectángulo de base [2,4] y altura 5, junto al triangulo recto situado encima de dicho rectángulo y cuya altura es el segmento comprendido entre los puntos $(4, 5)$ y $(4, 12)$.
Por lo tanto, tenemos que:
$\int\limits_2^4 f(x)dx <$ Area (rectángulo) + Area (triángulo)= $10 + \frac{1}{2}.2.7 = 17$ unidades área.
El dibujo de la gráfica de f, junto con la recta tangente y el segmento citado será, aproximadamente, así:



[

También puede ser estimada analíticamente: llamando $F = \int_2^4 f(x)dx$ tenemos

$$F \ \geq \ F_b = \int_2^4 (3x-1)dx = 3\frac{x^2}{2} - x|_2^4 = (24-4) - (6-2) = 16$$

$$F \ \leq \ F_a = \int_2^4 (3.5x-2)dx = 3.5\frac{x^2}{2} - 2x|_2^4 = (28-8) - (7-4) = 17$$

6. **Dada la función** $F(x) = \int_3^x \frac{2t-7}{t^2-t-2}dt$ **definida en** $[3, +\infty)$**, se pide:**

(a) Calcular el / los extremos relativos (o locales) y clasificarlos.

(b) Calcular $\int_3^4 \frac{2t-7}{t^2-t-2}dt$, determinando si dicho valor es positivo o negativo.

Sugerencia: los apartados a y b son completamente independientes.

1 punto

---

a) Como $F'(x) = \frac{2x-7}{x^2-x-2}$, $F'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{7}{2}$ es el único punto crítico.

Y como $F"(x) = \frac{2(x^2-x-2)-(2x-7)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-2x^2+14x-11}{(x^2-x-2)^2}$, se deduce que

$F"(\frac{7}{2}) = \frac{-2(49/4)+14(7/2)-11}{(\text{algo} \neq 0)^2} = \frac{-(49/2)+49-11}{(\text{algo} \neq 0)^2} > 0$

luego la función F alcanza un mínimo local en el punto crítico.

b) Como $\frac{2x-7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \Longrightarrow 2x-7 = A(x-2)+B(x+1)$.

Luego, sustituyendo $x = 2$, obtenemos $-3 = 3B \Longrightarrow B = -1$.

Análogamente, sustituyendo $x = -1$, obtenemos $-9 = -3A \Longrightarrow A = 3$

Por lo tanto, se verifica que $F(4) = \int_{\mathbf{3}}^{\mathbf{4}} (\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2})dx =$

$= [3\ln(x+1) - \ln(x-2)]_3^4 = 3\ln 5 - \ln 2 - 3\ln 4 = \ln\frac{125}{128} < 0.$

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 4, 5 Y 6