Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **21 de Enero de 2014**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \sqrt{25 + e^{2x}}$**. Se pide:**

(a) Representar gráficamente la función, calculando previamente su dominio, imagen, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de $f(x)$.

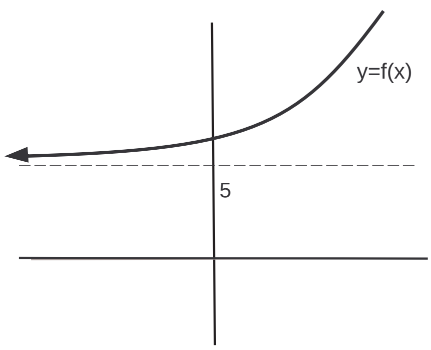
(b) Halla la expresión analítica de $f^{-1}(x)$, indicando su dominio, imagen y asíntotas. Dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$.

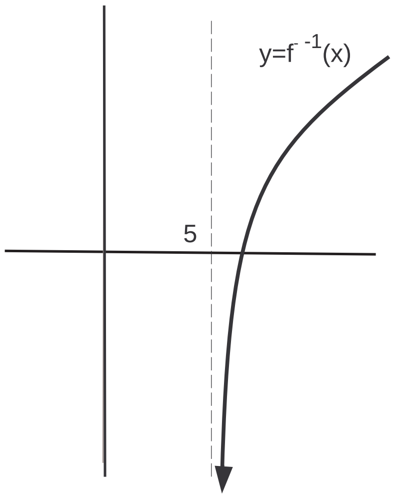
1 punto

---

a) El dominio de la función anterior es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
Por otro lado, como $f\,'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{25 + e^{2x}}}$,se deduce que f es creciente y continua en todo el dominio.
Además. como $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$, se deduce que su imagen es $(5, \infty)$ y que no tiene asíntotas verticales. Para calcular las asíntotas horizontales y oblicuas de f, es suficiente tener en cuenta $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, luego la función tiene asíntota horizontal en $-\infty$ y no tiene asíntota en ∞.
Por lo tanto, la gráfica de f tendrá un aspecto, aproximadamente, como muestra la figura más abajo.

b) Consideremos la ecuación $y = \sqrt{25 + e^{2x}}$, donde $x \in \mathbb{R}, 5 < y$. Entonces,
$y = \sqrt{25 + e^{2x}} \Longleftrightarrow y^2 = 25 + e^{2x} \Longleftrightarrow y^2 - 25 = e^{2x} \Longleftrightarrow \ln(y^2 - 25) = 2x \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(y^2 - 25)$.
Luego $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 25)$. El dominio de $f^{-1}(x)$es $(5, \infty)$ y su imagen es $\mathbb{R}$.
Como la gráfica de $f^{-1}(x)$ es la simétrica de la gráfica de $f(x)$, $f^{-1}(x)$ es una función creciente, con asíntota vertical $x = 5$ a la derecha de 5, y que no tiene asíntota en ∞.
Por lo tanto, la gráfica de f^{-1} será, aproximadamente como muestra la figura.





(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $x + y^3 = x^3 + y$ en un entorno del punto $x = -1, y = 1$, se pide:**

(a) Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x)$, centrado en $a = -1$, y utilizarlo para obtener una aproximación del valor de $f(-0,9)$.

(b) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en el punto $x = -1$ y dibujar de forma aproximada la gráfica de f cerca del punto $x = -1$.

Sugerencia para b): para representar f solo es necesario hallar la recta tangente y utilizar el hecho de que $f''(-1) < 0$.

1 punto

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera y segunda de la función:

$1 + 3y^2y' = 3x^2 + y'$

$6y(y')^2 + 3y^2y'' = 6x + y''$

A continuación, sustituimos en el punto $x = -1, y = 1$ y obtenemos que:

$f(-1) = 1$ (enunciado del problema), $f'(-1) = 1, f''(-1) = -6$

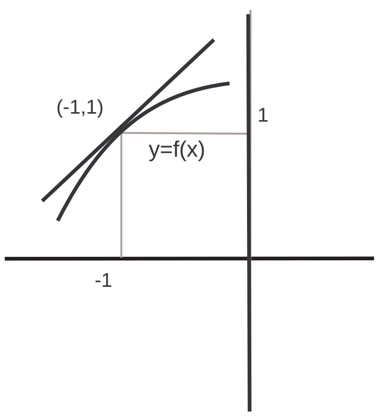
Luego el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a = -1$, será:

$P(x) = 1 + (x + 1) + \frac{(-6)}{2}(x + 1)^2$.

Por lo tanto, tenemos que $f(-0,9) \approx P(-0,9) = 1 + 0,1 - 3(0,1)^2 = 1,07$.

b) La ecuación de la recta tangente será: $y = 2 + x$. Además, como $f''(-1) = -6 < 0$, la función f es cóncava cerca del punto $x = -1$.

Por lo tanto, la gráfica de f quedará debajo de la recta tangente y será, cerca del punto $x = -1$, aproximadamente así:



(3) **Un agricultor vende 400 toneladas de arroz a 200 euros la tonelada. El agricultor calcula que sus ventas aumentarían en 100 toneladas si el precio disminuyera en 10 euros por tonelada. Se pide:**

(a) Hallar la función (inversa) de demanda y la función de ingresos marginales. Compararlas

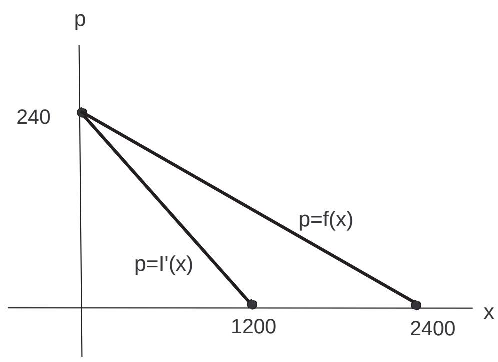
(b) Si los costes fijos de producir x toneladas son de C_0 euros y los costes marginales son constantes e iguales a 40, hallar los costes fijos sabiendo que, cuando la empresa produce la cantidad que da el máximo beneficio, el coste medio es de 50 euros.

Observación para a): se supone que la función (inversa) de demanda, $p = f(x)$ es lineal, es decir, $f(x) = ax + b$.

1 punto

---

a) Sea $p = ax + b$ la función inversa de demanda. Entonces:
i) $200 = 400a + b$, cuando el agricultor vende 400 toneladas a 200 euros la tonelada.
ii) $190 = 500a + b$, cuando el agricultor baja 10 euros el precio y aumenta en 100 toneladas las ventas.
Operando, se obtiene que $a = -\frac{1}{10}, b = 240$.
Por lo tanto, la función inversa de demanda es $p = -\frac{1}{10}x + 240$.
Analogamente, luego la función de ingresos será: $I(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 240x$
Finalmente, la función de ingresos marginales será: $I'(x) = -\frac{1}{5}x + 240$
Como puede comprobarse, ambas rectas, la función inversa de demanda y la de ingresos marginales, parten del punto (x=0, p=240) y son decrecientes, pero la función de ingresos marginales decrece más deprisa que la función inversa de demanda.
El gráfico siguiente ilustra la situación:



b) En primer lugar, la función de costes es $C(x) = 40x + C_0$.
Luego la función de beneficios será: $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 200x - C_0$.
Como la función de beneficios es cóncava, pues $B"(x) = -\frac{1}{5} < 0$, el punto crítico, si existe, será el único maximizador global.
Así pues, $B'(x) = -\frac{1}{5}x + 200 = 0 \iff x = 1.000$.
Como los costes medios de producir 1000 toneladas han de ser de 50 euros, se cumple

$$\frac{C(1.000)}{1.000} = 40 + \frac{C_0}{1.000} = 50 \iff C_0 = 10.000$$

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 1, 2 Y 3

(4) **Sea** $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, **continua en** $[\mathbf{0},\mathbf{3}]$ **y derivable en el intervalo** $(0,3)$, **tal que** $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$. **Se pide:**

(a) Enunciar el teorema del valor medio, o de Lagrange.

(b) Demostrar que existen $c_1 \in (0,1)$ tal que $f'(c_1) = 1$ y $c_2 \in (2,3)$ tal que $f\,'(c_2) = 4$.

1 punto

---

a) .

b) Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[0,1]$, se deduce la existencia de $c_1 \in (0,1)$ tal que

$f\,'(c_1) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$

Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[2,3]$, se deduce la existencia de $c_2 \in (2,3)$ tal que

$f\,'(c_2) = \dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 4.$

(5) **Se considera el conjunto** $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x)\}$, **siendo** $f(x) = |x^2 - 1|$ **y** $g(x) = -2x^2 + 2$**. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular el área del recinto anterior.

Sugerencia: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

1 punto

---

a) Como $g(x) = -2(x^2-1) = 2(1-x^2)$ y $f(x)$ puede definirse como una función a trozos de la siguiente forma:

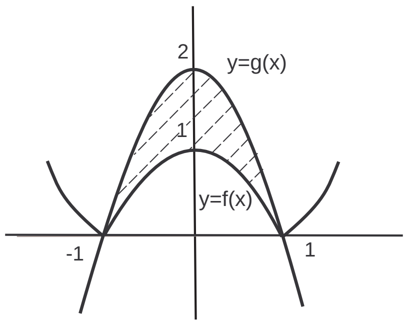
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$f(x) = g(x)$ se cumple cuando $x = -1, x = 1$, en cuyo caso $f(-1) = g(-1) = f(1) = g(1) = 0$.

Obviamente, $x < -1$ o $x > 1 \Longrightarrow g(x) < 0 < f(x)$, luego (x,y) no pertenece al conjunto A, para ningún y.

Por último, si $-1 \leq x \leq 1$, ambas funciones son parábolas cóncavas, simétricas respecto al eje vertical, al que cortan en los puntos $(0,1)$ y $(0,2)$.

Por lo tanto, el recinto tiene la siguiente forma:



Obviamente, $máximo(A)$ no existe, pues $\{\text{maximales}(A)\} = \{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 1\}$.

Sin embargo, $\{mínimo(A)\} = \{\text{minimales}(A)\} = \{(-1,0)\}$.

b) El área solicitada, utilizando la simetría respecto al eje vertical, es:

$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))dx = 2\int_{0}^{1} [(-2x^2+2) - (1-x^2)]dx = 2\int_{0}^{1} (-x^2+1)dx = 2[-\frac{1}{3}x^3 + x]_0^1 =$

$= 2(-\frac{1}{3} + 1) = \frac{4}{3}$ unids área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, **se pide:**

(a) Calcular, si existe, la primitiva $F(x)$ de dicha función que cumpla $F(1) = -1$.

(b) Hallar la ecuación de las recta tangente a la función $F(x)$, en $x = 4$.

Sugerencia para el apartado a): realizar el cambio de variable $x = t^2$.

1 punto

---

a) Si hacemos el cambio de variable $x = t^2 \Longrightarrow \sqrt{x} = t, dx = 2tdt$, luego la integral indefinida de f es:

$\int f(x)dx = \int \dfrac{t}{1+t} 2tdt = 2\int \dfrac{t^2}{1+t}dt = 2\int (\dfrac{t^2-1}{t+1} + \dfrac{1}{1+t})dt =$

$= 2\int (t - 1 + \dfrac{1}{1+t})dt = 2(\dfrac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) + C = 2(\dfrac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x}) + C$

Por último, como $F(1) = -1 \Longrightarrow 2(\dfrac{1}{2} - 1 + \ln(2) + C = -1 \Longrightarrow C = -2\ln 2 \Longrightarrow$

$F(x) = 2(\dfrac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x}) - \ln 2)$

b) Por el teorema fundamental del cálculo se cumple que $F'(x) = f(x)$. Por tanto, se verifica que:

$F'(4) = f(4) = \frac{2}{3}$

Por otro lado, $F(4) = 2(\dfrac{4}{2} - \sqrt{4} + \ln(1+\sqrt{4}) - \ln 2) = 2(\ln 3 - \ln 2) = \ln \frac{9}{4}$

Así pues, la ecuación de la recta tangente es $y - F(4) = F'(4)(x-4)$, es decir

$y - \ln\frac{9}{4} = \frac{2}{3}(x-4)$.

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 4, 5 Y 6