PARTE I

Ejercicio	1	2	3	Parte I
Puntos				

Parte I	Parte II	Nota clase	Nota Final

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **14 de Enero de 2009**

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

1. Sea la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$**. Se pide:**

a) Hallar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de f, así como sus extremos locales y/o globales.

b) Hallar todas las asíntotas de f.

1 punto

---

a) Para estudiar el crecimiento derivamos la función y estudiamos su signo: $f'(x) = (\frac{e^x}{x-1})' = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, observamos que su signo viene determinado por el signo de $x-2$ pues e^x y $(x-1)^2$ son siempre positivos. De donde obtenemos que:
$f' > 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$, luego f es creciente en $(2, \infty)$.
$f' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$, luego f es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$.
En cuanto a los extremos locales, sabemos que f alcanza un mínimo local en $x = 2$ pues satisface la condición necesaria de extremo $f'(2) = 0$ y, por el párrafo anterior, también la suficiente del cambio de signo de f'.
En cuanto a los extremos globales $x = 2$ no puede ser un mínimo global, pues $f(2) > 0 > f(0)$; dado que $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \infty$ es claro que f no tiene máximo global. x$^{\text{o}}$

b) Para calcular sus asíntotas verticales observamos que el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$, si hacemos el límite por la derecha obtenemos $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = \infty$. Análogamente por la izquierda $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$. Por lo tanto f tiene a $x = 1$ como asíntota vertical.
Para las horizontales, si hacemos el límite hacia ∞ obtenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} =?$, se trata de una indeterminación de tipo L'Hopital, derivando numerador y denominador por separado obtenemos $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$. Por lo tanto f no tiene asíntota horizontal hacia más infinito.
Haciendo el límite hacia $-\infty$ obtenemos $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$ Por lo tanto $y = 0$ es asíntota horizontal hacia menos infinito.
Solo falta comprobar si tiene asíntota oblicua en ∞, para ello hacemos $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \frac{\infty}{\infty} =?$, se trata de una indeterminación de tipo L'Hopital, aplicando dos veces este método obtenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$, por lo tanto la función no tiene asíntotas oblicuas.

2. Sean a, b, c números reales y consideremos la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3, & x < 1 \\ b, & x = 1 \\ \dfrac{c}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

a) Estudiar, según los valores de a, b y c la derivabilidad de f en el intervalo $(0, 2)$.

b) Enunciar el teorema del valor medio y hallar los valores de a, b y c para que pueda aplicarse el teorema anterior a dicha función en el intervalo $[0, 2]$.

1 punto

---

a) En primer lugar, estudiamos si la función es continua en el intervalo $(0, 2)$. Para ello, observamos que el único punto que causa

problemas es $x = 1$. Ahora bien, $f(x)$ es continua en dicho punto cuando se cumple que:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x)$, es decir, cuando $a + 3 = b = c$.

Y ahora, suponiendo que $f(x)$ es continua en $x = 1$, $f(x)$ es derivable en $x = 1$ cuando

$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f\,'(x)$, es decir, cuando $2a = -c$.

Por lo tanto, se deduce que $a + 3 = c = -2a$, es decir, $a = -1, b = c = 2$.

Luego $f(x)$ es derivable en el intervalo $(0, 2)$ cuando $a = -1, b = c = 2$.

.

b) El teorema del valor medio, aplicado a una función f definida en el intervalo $[A, B]$ dice así:

Si f es continua en $[A, B]$ y derivable en (A, B), existe C en el intervalo (A, B) de forma que

$f(B) - f(A) = f\,'(C).(B - A)$.

Entonces, para que dicho teorema pueda aplicarse a la función f anteriormente citada, en el intervalo $[0, 2]$,

es suficiente con que se cumpla que f es derivable en $(0, 2)$, pues en ese caso se deduce automáticamente que f será continua en dicho intervalo y, en cualquier caso, f es continua en $x = 0$ y $x = 2$.

Luego se puede aplicar el teorema cuando $a = -1, b = c = 2$.

3. Sea $y = f(x)$ la función definida de manera implícita mediante la ecuación $\ln(x+y)+2y = 4x+2$ cerca del punto $(0,1)$. Se pide:

a) Hallar, mediante $f\,'(0)$, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 0$, $y = 1$.

b) Calcular aproximadamente, utilizando la ecuación de la recta tangente hallada anteriormente, el valor de $f(-0.1)$.

1 punto

---

a) Derivando la ecuación, obtenemos que $\dfrac{1+y'}{x+y} + 2y' = 4$, luego sustituyendo en $x = 0, y = 1$, obtenemos que
$\dfrac{1+y'}{0+1} + 2y' = 4$, luego $f\,'(0) = y' = 1$.
Por tanto, la ecuación de la recta tangente será: $y - 1 = 1.(x-0)$, es decir, $y = x+1$.

b) $f(-0.1) \approx y(-0.1) = -0.1 + 1 = 0.9$

PARTE II

Ejercicio	4	5	6	Parte II
Puntos				

Parte I	Parte II	Nota clase	Nota Final

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **14 de Enero de 2009**

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

4. **Sea** $C(x) = C_0 + 60x + 0.01x^2$ **la función de costes de una empresa monopolista, siendo** $C_0 \geq 0$**, y donde** $x \geq 0$ **es el número de unidades producidas de cierta mercancía. La función inversa de demanda (o precio por unidad) es** $p(x) = 90 - 0.02x$**. Se pide:**
   a) Probar que la función de beneficios es cóncava y, a partir de ahí, determinar la cantidad x que maximiza el beneficio.
   b) ¿Para qué valor de C_0 se cumple que la producción que maximiza el beneficio coincide con la producción que minimiza el coste medio (o por unidad)?
   1 punto

---

a) La función de beneficios es: $B(x) = p(x).x - C(x) = 90x - 0.02x^2 - (C_0 + 60x + 0.01x^2) =$
$= -0.03x^2 + 30x - C_0$, luego $B"(x) = -0.06 < 0$.
Por tanto $B(x)$ es cóncava. Por lo tanto, el punto crítico será único y maximizador global. Ahora bien:
$B\,'(x) = -0.06x + 30 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{30}{0.06} = 500$
que es una solución aceptable, pues es una producción positiva cuyo precio de venta es
$p(500) = 90 - (0.02).500 = 80 > 0$.
Luego la producción $x = 500$ maximiza el beneficio.

b) La función de coste medio es convexa, pues $C_{med}(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{C_0}{x} + 60 + 0.01x$ satisface que
$C"_{med}(x) = \dfrac{2C_0}{x^3} > 0$. Por lo tanto, el punto crítico será único y minimizador global del coste medio.
Ahora bien:
$C'_{med}(x) = -\dfrac{C_0}{x^2} + 0.01 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{100C_0}$. Luego este punto coincidirá con el maximizador global del beneficio cuando
$500 = \sqrt{100C_0} \Longrightarrow C_0 = \dfrac{500^2}{100} = 2500$.
Por lo tanto, para dicho valor de los costes fijos coinciden las producciones que maximizan el beneficio y minimizan el coste medio.

5. **Dada** $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$**, definida en el intervalo** $[0, \infty)$**, se pide:**

a) Estudiar el crecimiento/decrecimiento, y la concavidad/convexidad de cualquier primitiva F de f, así como la posible existencia de extremos (locales y/o globales) y de puntos de inflexión.

b) Hallar la primitiva F de f que cumple $F(0) = 1$.

Sugerencia: no es necesario conocer la expresión de $F(x)$ para el apartado a).

1 punto

---

a) Para estudiar el crecimiento/decrecimiento, así como los extremos de F, necesitamos la derivada de F. Pero como

$F'(x) = f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

Entonces F es creciente cuando F' es positiva, es decir, en el intervalo $[0, 1)$.

Análogamente, F es decreciente cuando F' es negativa, es decir, en el intervalo $(1, \infty)$.

Por lo tanto, F alcanza un máximo local y global en el punto $x = 1$.

Por otro lado, para estudiar la concavidad/convexidad, así como los puntos de inflexión de F, necesitamos la derivada segunda de F. Pero como

$F"(x) = f\,'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2} < 0$

Entonces F es cóncava en el intervalo de definición, es decir, en el intervalo $[0, \infty)$.

Por lo tanto, F no posee ningún punto de inflexión.

b) En primer lugar, hallemos la ecuación de todas las primitivas de f.

$\int f(x)dx = \int \dfrac{1-x}{1+x}dx = \int \dfrac{-1-x+2}{1+x}dx = \int(-1 + \dfrac{2}{1+x})dx = -x + 2\ln(1+x) + C$

Y ahora, como nos interesa, de entre todas las primitivas, aquella qe cumpla $F(0) = 1$, se deduce que

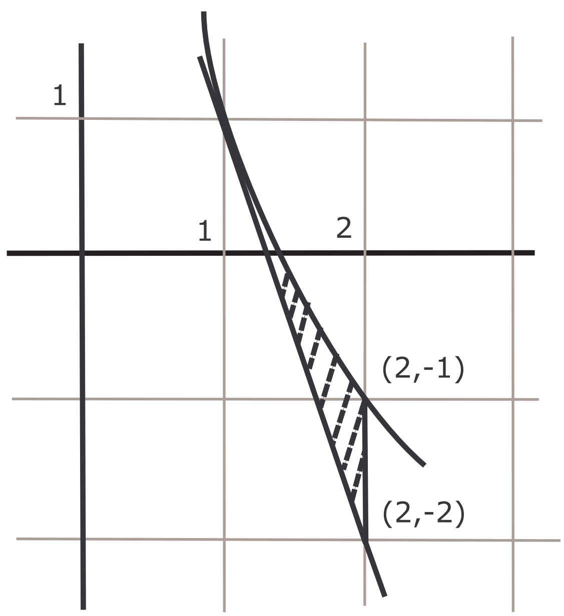
$-0 + 2\ln(1+0) + C = F(0) = 1 \Longrightarrow C = 1.$

Por lo tanto, $F(x) = -x + 2\ln(1+x) + 1.$

6. **Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, se considera el conjunto A limitado por la gráfica de f, la recta vertical $x = 2$ y la recta r, tangente a la gráfica de f en el punto $c = 1$. Se pide:**
   a) Representar gráficamente el conjunto A.
   b) Calcular el área de dicho conjunto.
   Sugerencia: probar que la recta tangente r corta a la gráfica de f sólo en el punto de tangencia.
   1 punto

---

a) Como $f\,'(x) = 3x^2 - 6x \Longrightarrow f\,'(1) = 3 - 6 = -3$.
Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $c = 1$ será:
$y - 1 = (-3)(x - 1)$, es decir, $y = -3x + 4$.
Por otro lado, en el intervalo $(1, 2]$ la gráfica de f queda siempre por encima de la recta tangente hallada anteriormente. Eso puede probarse, por ejemplo, usando el hecho de que f es convexa en dicho intervalo, ya que si $1 < x \leq 2 \Longrightarrow f"(x) = 6x - 6 > 0$.
Además, como $f\,'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) < 0$ si $1 < x < 2$, se deduce que f es decreciente en dicho intervalo.
Finalmente, observando que la recta tangente y la gráfica cortan, respectivamente,
a la recta vertical $x = 2$ en los puntos $(2, -2)$ y $(2, -1)$, se deduce que el conjunto A es, aproximadamente, así:



b) Como la gráfica de f queda siempre por encima de la recta tangente r en el intervalo $(1, 2]$, se deduce que
$\acute{A}rea(A) = \int_1^2 (f(x) - r(x))dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 3 - (-3x + 4))dx =$
$= \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)dx = \int_1^2 (x - 1)^3 dx = [\ \dfrac{(x-1)^4}{4}]_1^2 = \frac{1}{4}$.