HOJA 4 : Derivación II

1. Calcula los siguientes límites:

a)(*) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$ b) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ c)(*) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

d)(*) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x-1}\right)$ e) $\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{tg}(1/x)$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}x-\mathrm{arctg}x}{x}$

g) $\lim_{x\to 1/2}(4x^2-1)\mathrm{tg}(\pi x)$

a) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}=1.$ Análogamente, parte c).
b) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$
d) $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x-1}=-\infty$
.

2. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a)(*) $f(x)=\frac{2x^3-3x^2-8x+4}{x^2-4}$ b) $f(x)=\frac{x^3}{x^3+x^2+x+1}$ c)(*) $f(x)=2x+e^{-x}$

d) $f(x)=\frac{\mathrm{sen}x}{x}$ e)(*) $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$ f) $f(x)=\frac{3x^2-x+2\mathrm{sen}x}{x-7}$

g)(*) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ h)(*) $f(x)=xe^{1/x}$ i)(*) $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

a) Asíntotas verticales en x=2 y en x=-2.
Por otra parte, la asíntota oblícua en ∞ y en $-\infty$ es $y=2x-3$.
c) $y=2x$ es la asíntota oblícua en ∞.
e) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}=-\frac{1}{2}$. No hay más asíntotas.
g) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty$, y no hay más asíntotas verticales.
Por otro lado, $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$, y no hay asíntota horizontal, ni oblícua en ∞.
h) $\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}=\infty$, y no hay más asíntotas verticales.
Por otro lado, $y=x+1$ es la asíntota oblícua en ∞, también es la asíntota oblícua en $-\infty$.
i) *N*o hay asíntota vertical.
Por otro lado, $y=0$ es la asíntota horizontal en ∞. Por último, la recta $y=-x$ es la asíntota oblícua en $-\infty$.
.

3. (*)Halla el polinomio de Taylor de orden 2 en a y calcula el valor aproximado de la función mediante este polinomio en $x=a+0.1$.

a) $f(x)=e^x$ en $a=0$ b) $f(x)=\mathrm{sen}x$ en $a=0$ c) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ en $a=1$

a) $P(x)=1+x+x^2/2$, luego $f(0.1)\approx 1.105$
b) $P(x)=x$, luego $f(0.1)\approx 0.1$
c) $P(x)=(x-1)-3\frac{(x-1)^2}{2}$, luego $f(1.1)\approx 0.085$
.

4. (*)Dado el polinomio de Taylor de orden 2 en $a=0$ de f determina si la función tiene un máximo o mínimo local en el punto $(0,f(0))$.

a) $P(x)=1+2x^2$ b) $P(x)=1+x+x^2$ c) $P(x)=1-2x^2$

a) f tiene un mínimo local en el punto .
b) f no tiene ni máximo ni mínimo local en el punto $(0,f(0))$.
c) f tiene un máximo local en el punto $(0,f(0))$.

.

5. Calcula los máximos y mínimos (relativos y absolutos) de f en los intervalos indicados:

a)(*) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$ en $[-1,2]$.

b) $f(x) = xe^{-x}$ en $[1/2,\infty)$, $[0,\infty)$ y IR.

a)

i) f alcanza mínimo local en x=0 y máximo local en x=1.

ii) f alcanza su mínimo global en $x = 0$.

iii) f alcanza su máximo global en $x = -1$.

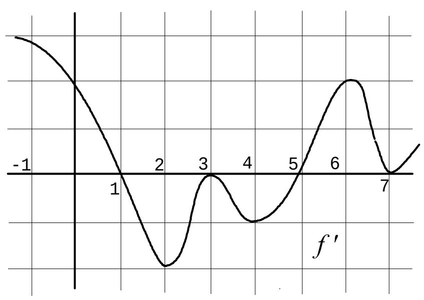
.

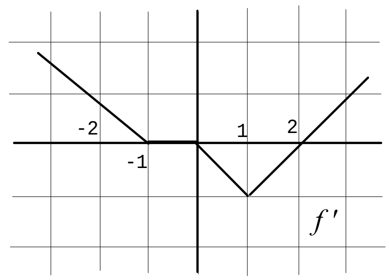
6. (*)Calcula en qué punto es mayor la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = -x^3 + 2x^2 + x + 2$.

$x = \frac{2}{3}$

.

7. Las figuras primera (*) y segunda muestran las gráficas de la derivada dedistintas f. Determina el crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, extremos relativos y puntos de inflexión de f.





a) f es creciente en $(-\infty,1]$ y en $[5,\infty)$.

f es decreciente en $[1,5]$.

Por lo tanto, f alcanza un máximo relativo en 1 y un mínimo relativo en 5. Por otro lado,

f es convexa en [2,3], [4,6] y en $[7,\infty)$;

f es cóncava en $(-\infty,2]$, [3,4] y en [6,7].

Por lo tanto, f tiene puntos de inflexión en 2, 3, 4, 6 y 7.

b) f es creciente en $(-\infty,-1]$ y en $[2,\infty)$.

f es decreciente en $[0,2]$.

Por último, f es constante en $[-1,0]$.

Por lo tanto, f alcanza un máximo relativo en todos los puntos del intervalo $[-1,0]$.

Análogamente f alcanza un mínimo relativo en todos los puntos del intervalo $(-1,0)$ y en el punto 2. Por otro lado,

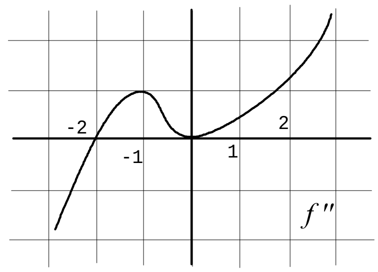
f es convexa en $[1,\infty)$;

f es cóncava en $(-\infty,-1]$ y en [0,1].

Por lo tanto, f tiene un punto de inflexión en 1.

.

8. La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada segunda de f. Determina los intervalos de convexidad de f y los puntos de inflexión. Determina el crecimiento y los extremos relativos de f supuesto que $f'(-3) = f'(0) = 0$.



f es convexa en [-2, ∞). f es cóncava en $(-\infty,-2]$.
Por lo tanto, f tiene un punto de inflexión en x=–2.
Además, f es creciente en $(-\infty,-3]$. Análogamente, se cumple que f es decreciente en $[-3,0]$.
De la misma forma, f es creciente en $[0,\infty)$.
Por lo tanto, f tiene un máximo local en x=–3 y un mínimo local en x=0.
.

9. Sea $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^\beta \text{ si } 1 \leq x \end{cases}$ Discutir, según los valores de α y β, cuándo f es cóncava o convexa.
f será convexa en $[0,\infty)$ cuando $1 < \alpha \leq \beta$.
Análogamente, f será cóncava en $[0,\infty)$ cuando $0 < \beta \leq \alpha < 1$.
.

10. (*)Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexa, y sea $x > 0$. Comprobar gráficamente las siguientes desigualdades:
$f(1) < \frac{1}{2}(f(1-x)+f(1+x)) < \frac{1}{2}(f(1-2x)+f(1+2x))$

11. (*)Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cóncava, y sea $x > 0$. Comprobar gráficamente las siguientes desigualdades:
$f(1) > \frac{1}{2}(f(1-x)+f(1+x)) > \frac{1}{2}(f(1-2x)+f(1+2x))$

12. (*)Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, convexa, tal que $f'(1) = 0$.
a) Hallar los extremos locales de f.
b) ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?
c) Supongamos ahora $f:[0,n]\to\mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?
a) y b): 1 es minimizador local y global de f
Además, no puede existir maximizador global de f, pues $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
c) En este caso, además de lo dicho respecto a los minimizadores, podemos asegurar que existirá maximizador global, que será el punto 0 (si $f(n) \leq f(0)$) o el punto n (si $f(0) \leq f(n)$).
.

13. (*)Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, cóncava, tal que $f'(1) = 0$.
a) Hallar los extremos locales de f.
b) ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?
c) Supongamos ahora $f:[0,n]\to\mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?
Lo mismo que el problema anterior, cambiando máximos por mínimos y viceversa.
.

14. Estudia y representa las siguientes funciones:
a) $f(x) = x+\cos x$ b) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x-1}$ c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ d) $f(x) = \sqrt{|x-4|}$
Solución:
a) $f(x)$ siempre es creciente y la única raíz de esta función está en el intervalo $(-\frac{\pi}{2},0)$.

Finalmente:

$f(x)$ es convexa en los intervalos de la forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi),$ donde $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$

$f(x)$ es cóncava en los intervalos de la forma $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi),$ donde $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$

Y, por lo tanto, los puntos de inflexión de $f(x)$ son de la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi,$ donde $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$

15. (*)Dadas las funciones de coste $C(x) = 4000 + 10x + 0.02x^2$ y demanda $p(x) = 100 - (x/100)$, halla el precio p por unidad que produce el máximo beneficio.

$p = 85.$

.

16. (*)Sea $p(x) = x^2 - x + 1/3$ el precio de venta de 1 kilo de plutonio cuando se venden x unidades. Sabiendo que la empresa vende en el mercado un máximo de 2 kilos, halla el valor de x que maximiza los ingresos de la empresa. Podemos suponer que todos los costes de la empresa los paga el estado.

El máximo se alcanza en el punto x=2.

.

17. (*)Sea $p(x) = 100 - x^2/2$ la función de demanda de un producto y $C(x) = 48 + 4x + 3x^2$ su función de coste. ¿Cuál es la producción x que minimiza el coste medio? ¿Y si hay una producción máxima x^?

$x = 4$ en el primer caso, $x = \min(4, x\hat{})$ en el segundo caso.

.

18. Una empresa que posee una función de costes $c(x) = x^2 + 1$ se enfrenta a una demanda dada por la función $p(x) = \begin{cases} 10 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 10 \end{cases}$. Halla la producción que da máximo beneficio.

19. (*)Un fabricante vende 5000 unidades al mes a 100 euros por unidad y cree que sus ventas aumentarían en 500 unidades por cada 5 euros de reducción en el precio unitario.

a) Halla las funciones de demanda, ingreso e ingreso marginal.

b) Si el coste de producción de x unidades es $C(x) = 1000 + 0.12x$, halla la función de beneficio marginal.

La función de demanda es $p(x) = 150 - 0'01x$.

$I(x) = 150x - 0'01x^2,\ I'(x) = 150 - 0'02x.$

b) $B'(x) = 149'88 - 0'02x.$