HOJA 2: Límites y Continuidad

1. (*)Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3+2x^2-x}{5x^2+2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+3x^4}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{senx}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2cosx+1}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x^2+x+2}{x^2-7x+1}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-ax^3}{x^2+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-x^3}{x^2+b}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3+2x^2-x}{5x^2+2x} = -1/2.$
b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x-2} = 7$
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+3x^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{senx}{x} = 0.$
f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2cosx+1}{x^2+1}$ no existe.
g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x^2+x+2}{x^2-7x+1} = -\infty.$
h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-ax^3}{x^2+1} = \infty.$
i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-x^3}{x^2+b} = 0.$

.

2. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$, calcular:

a)$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen^2(2x)}{x^2}$ b)$\lim\limits_{x\to 1} \frac{sen(x^2-1)}{x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen^2(2x)}{x^2} = 4$
b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{sen(x^2-1)}{x-1} = 2$

.

3. Hallar las discontinuidades (si las hay) de las funciones que siguen:

a)(*)$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$

b)$f(x) = \begin{cases} x+\pi & si \quad x \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{xsenx}{1-cosx} & si \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad \frac{\pi}{2} \le x \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & si \quad x \le -1. \\ -1/2(1-x^{-2}) & si \quad -1 < x \le 1 \\ \frac{sen\pi x}{\pi} - 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$

d) (*)$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1} & si \quad x < -1. \\ e^{1/x} & si \quad -1 \le x < 0 \\ \pi & si \quad x = 0 \\ 1/x & si \quad 0 < x \end{cases}$

a) f es discontinua en x=3.

b) f es continua en $-\pi/2$. Por otra parte, f no es continua en x=0.
Por último, luego f no es continua en $\pi/2$.
c) f es continua en -1. Por otra parte, f no es continua en 1.
d) f no es continua en -1. Por otro lado, f no es continua en 0.

.

4. (*)Calcula los siguientes límites:
i) $\lim_{x\to 1}\left\{(x-1)arcsen(\frac{tg^4(x)}{1+tg^4(x)})\right\}$
ii) $\lim_{x\to 2}\frac{1+h^2(x)}{|x-2|}$, con $h(x)$ una función con límite finito cuando $x \to 2$.
i) $\lim_{x\to 1}\left\{(x-1)arcsen(\frac{tg^4(x)}{1+tg^4(x)})\right\} = 0$.
ii) $\lim_{x\to 2}\frac{1+h^2(x)}{|x-2|} = \infty$.

.

5. (*)Calcular
a) $\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2}{x^2-9}$ b) $\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2}{x^2-9}$ c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{senx}$ d) $\lim_{x\to 0^-}(1-1/x)^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2x}{x^3}$
a) $\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2}{x^2-9} = -\infty$.
b) $\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2}{x^2-9} = \infty$.
c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{senx} = \infty$.
d) $\lim_{x\to 0^-}(1-1/x)^{\frac{1}{x}} = 0$.
e) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2x}{x^3} = -\infty$

.

6. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones:
(*)$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$ (*)$h(x) = \sqrt{x^2-1}$ (*)$m(x) = \frac{1}{lnx}$ (*)$n(x) = e^{1/x}$
a) $y = x$ es asíntota oblicua en ∞ (y, análogamente, en $-\infty$). Por otra parte, $x = -1, x = 1$ son las asíntotas verticales.
b) $y = x$ es asíntota oblicua en ∞ (y, análogamente, en $-\infty$). Por otra parte, $x = 0$ es la única asíntota vertical.
c) $y = x$ es asíntota oblícua en ∞. Sin embargo, la asíntota en $-\infty$ es $y = -x$.
d) $y = 0$ es la asíntota horizontal en ∞, $x = 0$ no es una asíntota vertica, $x = 1$ es una asíntota vertical.
e) $y = 1$ es la asíntota horizontal en ∞ y en -∞, $x = 0$ es la única asíntota vertical.

.

7. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

.

8. (*)a) Usar el teorema de los valores intermedios para comprobar que las funciones que siguen tienen un cero en el intervalo indicado.
i) $f(x) = x^2-4x+3$ en $[2,4]$; ii) $g(x) = x^3+3x-2$ en $[0,1]$.
b) Obtener mediante particiones del intervalo y aplicaciones sucesivas de Bolzano, el cero con un error de ± 0.25.
x=3 es un cero de f con total exactitud. Por otra parte, x=3/4 es un cero de g con un error menor que ± 0.25.

.

9. (*)Comprueba que las ecuaciones $x^4-11x+7 = 0$ y $2^x-4x = 0$ tienen al menos dos soluciones.

a) Hay una raíz entre 0 y 1, y otra raíz entre 1 y 2.

b) Hay una raíz entre 0 y 1. Por otra parte $g(4) = 0$.

.

10. (*)Demuestra que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución. Determina la parte entera de dicha solución.

La parte entera de la solución es -1.

.

11. Hallar el dominio y la imagen de las funciones:

a)$f(x) = ln\left(\frac{(x^2-16)(x-1)}{x-3}\right)$ b)$g(x) = \sqrt{\frac{(x^2-16)(x-1)}{x-3}}$

a) $Dom(f) = (-\infty,-4) \cup (1,3) \cup (4,\infty)$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

b) $Dom(g) = (-\infty,-4] \cup [1,3) \cup [4,\infty)$; $\mathrm{Im}(g) = [0,\infty)$.

12. Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$, demostrar que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$

13. a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua, tal que $\mathrm{Im}(f) \subset [a,b]$. Probar que f tiene al menos un punto fijo.

b) Supongamos además que f es monótona. ¿ Existirá un único punto fijo?

14. a) Probar, mediante el teorema de los ceros de Bolzano, que la función $f(x) = x^3 - 5$ tiene al menos un punto fijo en el intervalo $[0,n]$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

b) Obtener, con un error de ± 0.25, un punto fijo de f.

c) ¿Existirá un único punto fijo?

.

a) $f(x) = x^3 - 5$ tiene un punto fijo en $(0,2)$.

b) f tiene un punto fijo en $\frac{7}{4}$ con un error menor de ± 0.25.

c) El punto fijo será único en cualquier intervalo $[0,n]$.

.

15. (*)Discutir en los casos siguientes si las funciones alcanzan extremos globales y/o locales en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2 \quad x \in [-1,1]$ b) $f(x) = x^3 \quad x \in [-1,1]$

c) $f(x) = senx \quad x \in [0,\pi]$ d) $f(x) = -x^{\frac{1}{3}} \quad x \in [-1,1]$

a) f alcanza máximo global en -1 y en 1. No alcanza máximos locales.
f alcanza mínimo local y global en 0.

b) f alcanza mínimo global en -1 y máximo global en 1.
No alcanza extremos locales.

c) f alcanza máximo global y local en $\pi/2$, y mínimos globales en 0 y en π.
No alcanza mínimos locales.

d) f alcanza mínimo global en 1 y máximo global en -1.
No alcanza extremos locales.

.

16. Sustituir en el problema anterior el intervalo dado por $[0,\infty)$ o por $\mathbb{R}$ en cada una de las funciones.

17. Sea $f(x) = arctg\left(\frac{tg^2x}{1+tg^4x}\right)$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Discutir, según los valores de a y b, cuándo f alcanza máximo y mínimo en $[a,b]$.

18. Explicar por qué $f(x) = tgx$ tiene un máximo en $[0,\pi/4]$, pero no en $[0,\pi]$.

19. (*)a) Sea $C(x) = \frac{3x^2+x}{x-1} + 100$, la función de costes totales de producción, suponiendo $x \geq 7$.

Comprueba si tiene asíntota oblicua cuando $x \to \infty$.

b) Considera la función $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, es decir, los costes medios de producción. Comprueba que tiene asíntota horizontal cuando $x \to \infty$.

c) ¿Hay alguna relación entre la asíntota oblícua de la parte a) y la horizontal de la parte b?

.

a) $y = 3x + 104$ es la asíntota oblicua en ∞ de $C(x)$.

b) Obviamente, es $y = 3$.

c) En efecto, el coeficiente de la x en la asíntota oblicua de la parte a) es el término constante en la parte b).

.

20. (*)Una entidad bancaria ofrece una cuenta corriente con las siguientes condiciones: los 250.000 primeros euros sin remunerar, el resto al 7% de interés anual. Considera la siguiente función: $i : [0, \infty) \to IR$ definida como $i(x)$="interés obtenido en % al depositar un capital x y mantenerlo durante un año".

i) Obtener $i(x)$.

ii) Calcular $\lim_{x \to \infty} i(x)$.

iii)¿Existe algún capital c para el que $i(c) = 7$?

iv) ¿A partir de qué capital se obtiene al menos un 6% de interés?

v) Dibuja la función i.

.

a) $i(x) = 7(x - 250.000)/x,$ si $x \geqslant 250.000; 0,$ si $x < 250.000$.

b) 7.

c) No.

d) cuando $x = 1.750.000$