Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   9 de septiembre de 2004

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

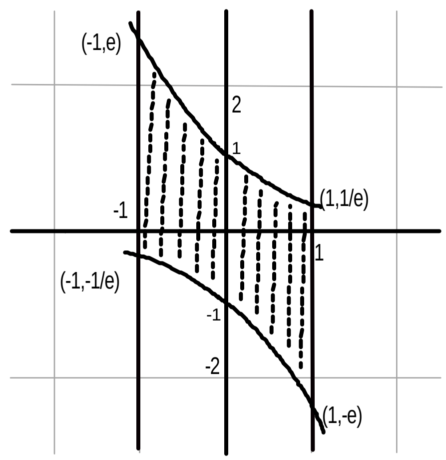
MODELO 1:

1. **Sea** $A = \left\{(x,y) \in \mathsf{R}^2 : |x| \leq 1; -e^x \leq y \leq e^{-x}\right\}$. **Se pide:**

a) Representar el conjunto A.

b) Consideramos en R^2 el orden de Pareto definido por $(x_0,y_0) \leq_P (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1$, $y_0 \leq y_1$. Hallar el conjunto de puntos maximales y minimales, máximo y mínimo de A.
1 punto

a)



Como se ve en el dibujo, el conjunto A está delimitado lateralmente por las rectas verticales x = -1, x = 1, e inferior y superiormente por las gráficas de las funciones $y = -e^x, y = e^{-x}$ respectivamente.

b) Evidentemente, los puntos maximales del conjunto son aquellos que constituyen la gráfica de la función $y = e^{-x}$, cuando x varía entre -1 y 1.

Análogamente, los puntos minimales del conjunto son aquellos que constituyen la gráfica de la función $y = -e^x$, cuando x varía entre -1 y 1.

Por lo tanto, al haber varios puntos maximales y minimales, podemos asegurar que no hay ni máximo ni mínimo de A.

2. **Dada la función $f(x) = xe^{1-x}$, se pide:**

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y/o mínimos (relativos y absolutos) de la función $f(x)$.

b) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) Calcular las asíntotas y representar la gráfica de $f(x)$.

1,5 puntos

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada de f:

$f'(x) = e^{1-x} + xe^{1-x}(-1) = (1-x)e^{1-x}$. Por lo tanto, se deduce que la función es creciente si x <1 (pues la derivada es positiva) y decreciente si x >1 (pues la derivada es negativa). Además, la función alcanza en el punto x =1 un máximo relativo y absoluto, y no hay más extremos, ni locales ni globales.

b) Calculemos, para ello, la derivada segunda de f:

$f''(x) = -e^{1-x} + (1-x)e^{1-x}(-1) = (x-2)e^{1-x}$. Por lo tanto, se deduce que la función es cóncava si x <2 (pues la derivada segunda es negativa) y convexa si x >2 (pues la derivada segunda es positiva). Además, la función alcanza en el punto x =2 un punto de inflexión y no hay ningún otro más.

c) Como f es continua en todo su dominio, no tiene asíntotas verticales.

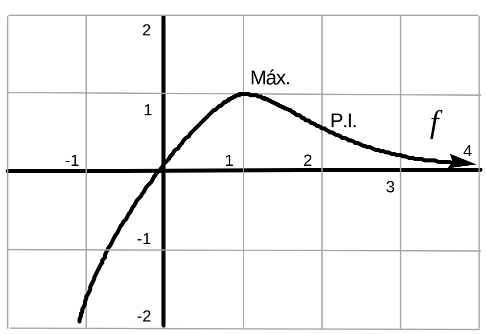
En $+\infty$, sin embargo, la función tiene como asíntota horizontal la recta y = 0, pues se cumple que

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{1-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} =$ (y ahora, aplicando L'Hopital) $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Por último, la función no tiene en $-\infty$ asíntota horizontal ni vertical, pues

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$, y $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{0^+} = \infty$.

Por tanto, la gráfica de f es, aproximadamente:



3. **Dada la función definida por** $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & si\ x \le 1 \\ a + b\ln x & si\ \ x > 1 \end{cases}$

a) Supóngase en este apartado que $a = b = 1$. Hallar el dominio y la imagen de la función $f(x)$.

b) Supóngase ahora a, b valores cualesquiera. Hallar los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 1$.

1 punto

---

a) Evidentemente, la función está bien definida para todos los valores de x > 1. En cuanto a los valores de $x \le 1$, f solo esta bien definida si x > -1. Por tanto, Dominio (f) = (-1, ∞).

Por otra parte, la función es continua y creciente excepto en el punto x=1. Además, tiende a -∞ en -1^+ y a ∞ cuando x tiende a ∞. Por último, como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \ln 2, \lim_{x\to 1^+} f(x) = a = 1,$ se deduce que Imagen(f) = (-∞, ln 2] $\cup$ (1, ∞).

b) En primer lugar, f deberá ser continua si ha de ser derivable. Para ello, hallamos los límites laterales:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \ln 2, \lim_{x\to 1^+} f(x) = a,$ luego f será continua si y solo si a = $\ln 2$.

Por otro lado, la función f será derivable si es continua y, además

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}, \lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x} = b,$ luego f será derivable si y solo si a = $\ln 2, b = \frac{1}{2}$.

4. **Sea la función** $f(x) = \ln(x^2 + b)$ **, siendo** b **un número real mayor que 0. Se pide:**

a) Hallar el polinomio de Taylor, de orden 2, correspondiente a $f(x)$, centrado en el punto $a = 0$.

b) Estudiar para que valores del parámetro b la función $f(x)$ alcanza un máximo o mínimo local en el punto $x = 0$.

c) En los casos en los que $f(x)$ alcanza un máximo o mínimo local en $x = 0$, ¿alcanzará $f(x)$ un máximo o mínimo global en dicho punto?

1’5 puntos

---

a) f(0) =$\ln b$; f’(x) = $\frac{2x}{x^2+b}$, luego f’(0) = 0. Por último, f''(x) = $\frac{2(x^2+b)-2x.2x}{(x^2+b)^2}$, luego f''(0) =$\frac{2b}{b^2} = \frac{2}{b}$. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 2 que nos piden será:

$P_2(x) = \ln b + 0 + \frac{1}{2}.\frac{2}{b}x^2 = \ln b + \frac{x^2}{b}$.

b) Como f’(0) = 0, f''(0) > 0, puesto que b es mayor que 0, se deduce f alcanza un mínimo relativo en el punto x = 0.

c) Como f’(x) < 0 cuando x < 0, y f’(x) > 0 cuando x > 0, se deduce que f es decreciente cuando x < 0 y creciente cuando x > 0, luego f alcanza un mínimo global en x = 0, para todo valor de b mayor que 0.

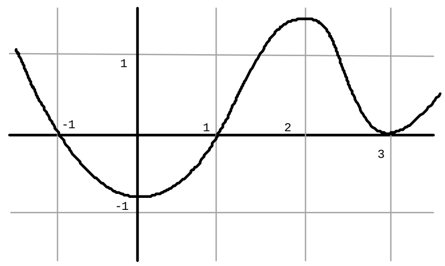
5. **La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de *f* para los apartados a) y b).**

a) Hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales de *f*.

b) Hallar los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de *f* .

c) Considérese ahora que la gráfica anterior NO representa la derivada de *f*, sino la derivada segunda de cierta función *g* . Hallar los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de *g*.

1,5 puntos



a) f es creciente en los intervalos donde f' es positiva (exceptuando el punto x = 3), es decir, en $(-\infty, -1)$ y en $(1,\infty)$.

Asimismo, f es decreciente en los intervalos donde f' es negativa, es decir, en $(-1, 1)$.

Por lo tanto, f alcanza un máximo local en el punto x = -1 y un mínimo local en x = 1.

b) f es convexa en los intervalos donde f' es creciente, es decir, en $(0, 2)$ y en $(3, \infty)$.

Asimismo, f es cóncava en los intervalos donde f' es decreciente, es decir, en $(-\infty, 0)$ y en (2,3).

Por lo tanto, los puntos x = 0, x = 2, y x = 3 son los puntos de inflexión de f.

c) g es convexa en los intervalos donde g'' es positiva (exceptuando el punto x = 3), es decir, en $(-\infty, -1)$ y en $(1,\infty)$.

Asimismo, g es cóncava en los intervalos donde g'' es negativa, es decir, en $(-1, 1)$.

Por lo tanto, los puntos x = -1, x = 1 son los puntos de inflexión de g.

6. **Sean** $C(x) = C_0 + 10x + 0,03x^2$ **y** $p(x) = 50 - 0'01x$ **las funciones de coste y de demanda, respectivamente, de una empresa monopolista. Se pide:**

a) Hallar la producción x_0 donde la empresa alcanza su máximo beneficio.

b) Dibujar las funciones de ingreso y coste marginales de dicha empresa, y hallar el nivel de producción x_1 donde las citadas funciones se cortan.

c) Comentar los resultados anteriores.

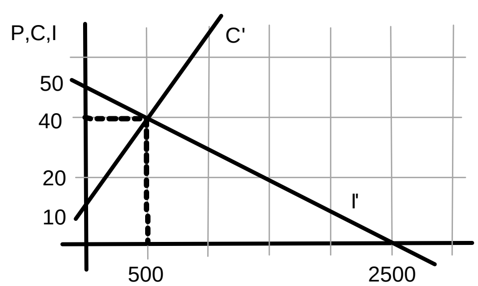
1'5 puntos

a) La función de beneficios B(x) = $I(x) - C(x) = (50 - 0'01x)x - (C_0 + 10x + 0,03x^2) = -0'04x^2 + 40x - C_0$. Luego

B'(x) = $-0'08x + 40 = 0$ equivale a $x = \frac{40}{0'08} = \frac{4000}{8} = 500$. Y, como B(x) es cóncava, sin más que comprobar que la derivada segunda de B es negativa, se deduce que la empresa alcanza su máximo beneficio para la producción x_0 =500

b) La función de ingreso marginal I'(x) es la recta $y = 50 - 0'02x$, y la función de coste marginal C'(x) es, asimismo, la recta $y = 10 + 0'06x$, cuando ambas rectas están contenidas en el primer cuadrante. Por lo tanto, ambas rectas se cortan cuando $10 + 0'06x = 50 - 0'02x$, o equivalentemente, cuando $0'08x = 40$, o equivalentemente, cuando

$x_1 = \frac{40}{0'08} = \frac{4000}{8} = 500$.



c) Los resultados se comentan por sí solos: el nivel de producción de máximo beneficio, x_0, coincide con el nivel de producción donde se igualan los ingresos y costes marginales, x_1. Eso no es de extrañar: si la empresa decidiera producir una unidad adicional, es decir producir 501 unidades, la última unidad producida provocaría perdidas, pues los costes marginales son superiores a los ingresos marginales. De la misma forma, si la empresa decidiera producir una unidad menos, es decir, 499 unidades, la empresa dejaría de ganar los beneficios que crea la producción de la unidad 500, pues la última unidad producida sí crea beneficios, ya que la recta de ingresos marginales queda por encima de la de costes marginales en el intervalo (499,500).

7. **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+x-2}$ **, se pide:**

a) Hallar todas las primitivas de dicha función $f(x)$.

b) Dada $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$, hallar los valores de x donde $F(x)$ alcanza un máximo o un mínimo local.

Justificar la respuesta.

1 punto

---

a) En primer lugar, hallamos las raíces del polinomio del denominador, que resultan ser x =1, x= -2. Luego $\dfrac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \dfrac{(A+B)x+2A-B}{x^2+x-2}$, luego se cumple, tomando x =1, x = 0 que

6 = 3A, 5 = 2A-B, es decir, A = 2, B = -1. Por lo tanto

$\dfrac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+2}$, es decir, las primitivas de la función f(x) son de la forma:

$2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$

b) $F(x)$ alcanzara un máximo o un mínimo local donde su derivada F'(x) = f(x) se anule, es decir, cuando el numerador de f(x) se haga 0. Esto es, cuando x sea igual a -5.

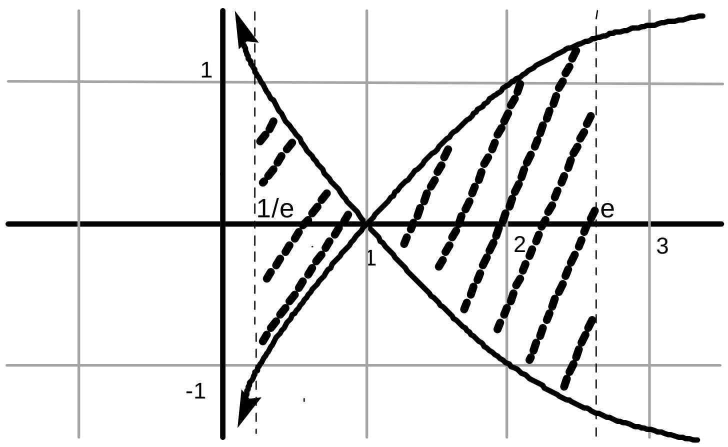
Por otra parte como $\lim\limits_{x\to -5-} F'(x) = \frac{0^-}{18} = 0^-$, $\lim\limits_{x\to -5+} F'(x) = \frac{0^+}{18} = 0^+$, F' es negativa en un intervalo a la izquierda de -5 (luego F decrece en ese intervalo), F' es positiva en un intervalo a la derecha de -5 (luego F crece en ese intervalo). Por lo tanto, F alcanza un mínimo local en el punto -5.

8. **Dadas las funciones** $f(x) = \ln x$, $g(x) = -\ln x$, **se pide**:

a) Dibujar el recinto encerrado entre las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = \frac{1}{e}$, $x = e$.

b) Hallar el área de dicho recinto.

1 punto



a) La función f(x) es creciente, la función g(x) es decreciente y ambas se cortan en el punto x donde

$f(x) = \ln x = -\ln x = g(x)$. Es decir, cuando $2\ln x = 0$, o en otras palabras, cuando x = 1.

Por otro lado, f(1/e) = $\ln e^{-1} = -1, g(1/e) = -\ln e^{-1} = 1, f(e) = 1, g(e) = -\ln e = -1$. Luego el recinto comprendido entre ambas gráficas es aproximadamente el descrito en la figura.

b) Como f está por debajo de g en el intervalo (1/e,1) y a la inversa en el intervalo (1,e), el área del recinto será:

$\int_{1/e}^{1} (-\ln x - \ln x)dx + \int_{1}^{e} (\ln x - (-\ln x))dx = \int_{1/e}^{1} -2\ln x dx + \int_{1}^{e} 2\ln x dx$. Resolviendo por partes se obtiene que

$\int \ln x dx = x\ln x - x$, luego el área del recinto será:

$[-2x\ln x + 2x]_{1/e}^{1} + [2x\ln x - 2x]_{1}^{e} = 4(1 - 1/e)$, después de realizar las operaciones correspondientes.