MATEMÁTICAS I: CONJUNTOS ORDENADOS.

Definición 1: (X, $\preceq$) es un conjunto ordenado cuando la relación $\preceq$ cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. A saber:

i) reflexiva (a $\preceq$ a);
ii) antisimétrica ([a $\preceq$b y b $\preceq$a] $\Rightarrow$a=b);
iii) transitiva [a $\preceq$ b y b $\preceq$ c] $\Rightarrow$ a $\preceq c$.

Definición 2: (X, $\preceq$) es un orden total si $\forall x, y \in X \Rightarrow [x \preceq y \ o \ y \preceq x]$.
Ejemplos: (R, $\leq$) es un orden total. $(R^2, \preceq_P)$ es un orden parcial definido por: $(x_1, y_1) \ \preceq_P (x_2, y_2) \Leftrightarrow [x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2]$.
Geométricamente, esto significa que (x_1, y_1) está a la izquierda y debajo respecto a (x_2, y_2). Por ello, (0,1) y (1,0) no son comparables.

Definición 3: si (X, $\preceq$) es un conjunto totalmente ordenado, definimos, para cualquier A$\subset X, A \neq \emptyset$:

a) Máximo(A)=M$\Leftrightarrow$[$\forall a \in A \Rightarrow$ a$\preceq$M y M$\in A$].
b) mínimo(A)=m$\Leftrightarrow$[$\forall a \in A \Rightarrow$ m$\preceq$a y m$\in A$].

Ejemplos: en R, A finito y A = [0,1] tienen máximo, pero no A=[0,1) ni A=[0, ∞).

Observación 1: análogamente, se puede definir máximo y mínimo en (X, $\preceq$), un conjunto parcialmente ordenado, pero es un concepto poco útil.
Ejemplo: A={(x , y): x $\geq$ 0, y $\geq$0, x+ y $\leq$1} no tiene máximo. Para resolver esta carencia, introducimos:

Definición 4: si (X, $\preceq$) es un conjunto parcialmente ordenado, para cualquier A$\subset X, A \neq \emptyset$, definimos:

a) Elementos maximales(A)={$a \in A$:$\nexists a' \in A, a' \neq a$ y a$\preceq$a'}.
b) Elementos minimales(A)={$a \in A$:$\nexists a' \in A, a' \neq a$ y a'$\preceq$a}.

De esta forma, el conjunto A={(x , y): x $\geq$ 0, y $\geq$0, x+ y $\leq$1} tiene como Elementos maximales(A)={$(x, y)$$\in$A: x+y=1}.

Observación 2: véase que, si existe máximo M, ese es el único maximal.
Lo mismo es cierto para el mínimo y los elementos minimales.
Pero el recíproco no es cierto: el conjunto
A={(x,y): x=0, 0$\leq$y$\leq$1}U{0<x<1, y=0} tiene un único elemento maximal, el punto (0,1), pero no tiene máximo.

Observación 3: un elemento maximal se conoce como óptimo de Pareto en el lenguaje económico. Es un concepto fundamental desde principios del s. XX.