HOJA 4 : Derivación II

1. Calcula los siguientes límites:

a)(*) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$ b) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ c)(*) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

d)(*) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x-1}\right)$ e) $\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{tg}(1/x)$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}x-\mathrm{arctg}x}{x}$

g) $\lim_{x\to 1/2}(4x^2-1)\mathrm{tg}(\pi x)$

2. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a)(*) $f(x)=\frac{2x^3-3x^2-8x+4}{x^2-4}$ b) $f(x)=\frac{x^3}{x^3+x^2+x+1}$ c)(*) $f(x)=2x+e^{-x}$

d) $f(x)=\frac{\mathrm{sen}x}{x}$ e)(*) $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$ f) $f(x)=\frac{3x^2-x+2\mathrm{sen}x}{x-7}$

g)(*) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ h)(*) $f(x)=xe^{1/x}$ i)(*) $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

3. (*)Halla el polinomio de Taylor de orden 2 en a y calcula el valor aproximado de la función mediante este polinomio en $x=a+0.1$.

a) $f(x)=e^x$ en $a=0$ b) $f(x)=\mathrm{sen}x$ en $a=0$ c) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ en $a=1$

4. (*)Dado el polinomio de Taylor de orden 2 en $a=0$ de f determina si la función tiene un máximo o mínimo local en el punto $(0,f(0))$.

a) $P(x)=1+2x^2$ b) $P(x)=1+x+x^2$ c) $P(x)=1-2x^2$

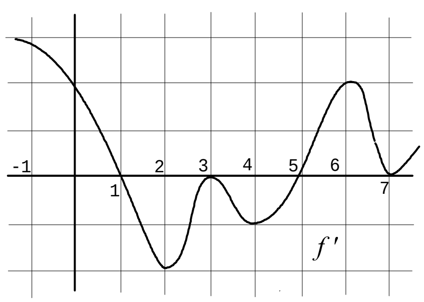
5. Calcula los máximos y mínimos (relativos y absolutos) de f en los intervalos indicados:

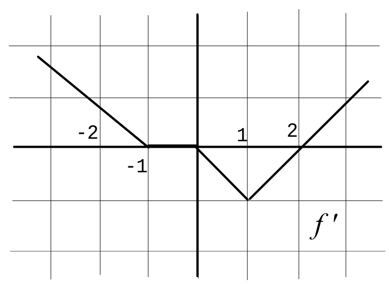
a)(*) $f(x)=3x^{2/3}-2x$ en $[-1,2]$.

b) $f(x)=xe^{-x}$ en $[1/2,\infty)$, $[0,\infty)$ y $I\!R$.

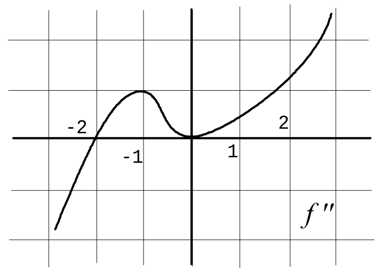
6. (*)Calcula en qué punto es mayor la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y=-x^3+2x^2+x+2$.

7. Las figuras primera (*) y segunda muestran la gráfica de la derivada de distintas f. Determina el crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad extremos relativos y puntos de inflexión de f.





8. La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada segunda de f. Determina los intervalos de convexidad de f y los puntos de inflexión. Determina el crecimiento y los extremos relativos de f supuesto que $f'(-3)=f'(0)=0$.



9. Sea $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^{\beta} \text{ si } 1 \leq x \end{cases}$ Discutir, según los valores de α y β, cuándo f es cóncava o convexa.

10. (*)Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, y sea $x > 0$. Comprobar gráficamente las siguientes desigualdades:
$f(1) < \frac{1}{2}(f(1-x)+f(1+x)) < \frac{1}{2}(f(1-2x)+f(1+2x))$

11. (*)Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava, y sea $x > 0$. Comprobar gráficamente las siguientes desigualdades:
$f(1) > \frac{1}{2}(f(1-x)+f(1+x)) > \frac{1}{2}(f(1-2x)+f(1+2x))$

12. (*)Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, convexa, tal que $f'(1) = 0$.
a) Hallar los extremos locales de f.
b) ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?
c) Supongamos ahora $f : [0,n] \to \mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?

13. (*)Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, cóncava, tal que $f'(1) = 0$.
a) Hallar los extremos locales de f.
b) ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?
c) Supongamos ahora $f : [0,n] \to \mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?

14. Estudia y representa las siguientes funciones:
a) $f(x) = x + \cos x$ b) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$ c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ d) $f(x) = \sqrt{|x-4|}$

15. (*)Dadas las funciones de coste $C(x) = 4000 + 10x + 0.02x^2$ y demanda $p(x) = 100 - (x/100)$, halla el precio p por unidad que produce el máximo beneficio.

16. (*)Sea $p(x) = x^2 - x + 1/3$ el precio de venta de 1 kilo de plutonio cuando se venden x unidades. Sabiendo que la empresa vende en el mercado un máximo de 2 kilos, halla el valor de x que maximiza los ingresos de la empresa. Podemos suponer que todos los costes de la empresa los paga el estado.

17. (*)Sea $p(x) = 100 - x^2/2$ la función de demanda de un producto y $C(x) = 48 + 4x + 3x^2$ su función de coste. ¿Cuál es la producción x que minimiza el coste medio? ¿Y si hay una producción máxima x^?

18. Una empresa que posee una función de costes $c(x) = x^2 + 1$ se enfrenta a una demanda dada por la función $p(x) = \begin{cases} 10 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 10 \end{cases}$. Halla la producción que da máximo beneficio.

19. (*)Un fabricante vende 5000 unidades al mes a 100 euros por unidad y cree que sus ventas aumentarían en 500 unidades por cada 5 euros de reducción en el precio unitario.

a) Halla las funciones de demanda, ingreso e ingreso marginal.

b) Si el coste de producción de x unidades es $C(x) = 1000 + 0.12x$, halla la función de beneficio marginal.