HOJA 2: Límites y Continuidad

1. (*)Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3+2x^2-x}{5x^2+2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+3x^4}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{senx}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2cosx+1}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x^2+x+2}{x^2-7x+1}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-ax^3}{x^2+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-x^3}{x^2+b}$

2. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$, calcular:

a)$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen^2(2x)}{x^2}$ b)$\lim\limits_{x\to 1} \frac{sen(x^2-1)}{x-1}$

3. Hallar las discontinuidades (si las hay) de las funciones que siguen:

a)(*)$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ b)$f(x) = \begin{cases} x+\pi & si \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{xsenx}{1-cosx} & si \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & si \quad x \leq -1. \\ -1/2(1-x^{-2}) & si \quad -1 < x \leq 1 \\ \frac{sen\pi x}{\pi} - 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$ d) (*)$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1} & si \quad x < -1. \\ e^{1/x} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ \pi & si \quad x = 0 \\ 1/x & si \quad 0 < x \end{cases}$

4. (*)Calcula los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x\to 1} \left\{ (x-1)arcsen\left(\frac{tg^4(x)}{1+tg^4(x)}\right) \right\}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1+h^2(x)}{|x-2|}$, con $h(x)$ una función con límite finito cuando $x \to 2$.

5. (*)Calcular

a) $\lim\limits_{x\to-3^+} \frac{x^2}{x^2-9}$ b) $\lim\limits_{x\to-3^-} \frac{x^2}{x^2-9}$ c)$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{senx}$ d)$\lim\limits_{x\to 0^-}(1-1/x)^{\frac{1}{x}}$ e)$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x}{x^3}$

6. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones:

(*)$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$ (*)$h(x) = \sqrt{x^2-1}$ (*)$m(x) = \frac{1}{lnx}$ (*)$n(x) = e^{1/x}$

7. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

8. (*)a) Usar el teorema de los valores intermedios para comprobar que las funciones que siguen tienen un cero en el intervalo indicado.

i)$f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[2,4]$; ii)$f(x) = x^3 + 3x - 2$ en $[0,1]$.

b) Obtener mediante particiones del intervalo y aplicaciones sucesivas de Bolzano, el cero con un error de ± 0.25.

9. (*)Comprueba que las ecuaciones $x^4 - 11x + 7 = 0$ y $2^x - 4x = 0$ tienen al menos dos soluciones.

10. (*)Demuestra que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución. Determina la parte entera de dicha solución.

11. Hallar el dominio y la imagen de las funciones:

a)$f(x) = ln\left(\frac{(x^2-16)(x-1)}{x-3}\right)$ b)$g(x) = \sqrt{\frac{(x^2-16)(x-1)}{x-3}}$

12. Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$, demostrar que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$

13. a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua, tal que $\mathrm{Im}(f) \subset [a,b]$. Probar que f tiene al menos un punto fijo.

b) Supongamos además que f es monótona. ¿ Existirá un único punto fijo?

14. a) Probar, mediante el teorema de los ceros de Bolzano, que la función $f(x) = x^3 - 5$ tiene al menos un punto fijo en el intervalo $[0,n]$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

b) Obtener, con un error de ± 0.25, un punto fijo de f.

c) ¿Existirá un único punto fijo?

15. (*)Discutir en los casos siguientes si las funciones alcanzan extremos globales y/o locales en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2 \quad x \in [-1,1]$ b) $f(x) = x^3 \quad x \in [-1,1]$

c) $f(x) = senx \quad x \in [0,\pi]$ d) $f(x) = -x^{\frac{1}{3}} \quad x \in [-1,1]$

16. Sustituir en el problema anterior el intervalo dado por $[0,\infty)$ o por $\mathbb{R}$ en cada una de las funciones.

17. Sea $f(x) = arctg\left(\frac{tg^2x}{1+tg^4x}\right)$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Discutir, según los valores de a y b, cuándo f alcanza máximo y mínimo en $[a,b]$.

18. Explicar por qué $f(x) = tgx$ tiene un máximo en $[0,\pi/4]$, pero no en $[0,\pi]$.

19. (*)a) Sea $C(x) = \frac{3x^2+x}{x-1} + 100$, la función de costes totales de producción, suponiendo $x \geq 7$. Comprueba si tiene asíntota oblícua cuando $x \to \infty$.

b) Considera la función $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$, es decir, los costes medios de producción. Comprueba que tiene asíntota horizontal cuando $x \to \infty$.

c) ¿Hay alguna relación entre la asíntota oblícua de la parte a) y la horizontal de la parte b?

20. (*)Una entidad bancaria ofrece una cuenta corriente con las siguientes condiciones: los 250.000 primeros euros sin remunerar, el resto al 7% de interés anual. Considera la siguiente función: $i : [0,\infty) \to IR$ definida como $i(x)$="interés obtenido en % al depositar un capital x y mantenerlo durante un año".

i) Obtener $i(x)$.

ii) Calcular $\lim_{x\to\infty} i(x)$.

iii)¿Existe algún capital c para el que $i(c) = 7$?.

iv) ¿A partir de qué capital se obtiene al menos un 6% de interés?

v) Dibuja la función i.