Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   13 de febrero de 2004

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Sea** $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq 1; \sqrt{x} - 1 \leq y \text{ si } 0 \leq x ; y \leq \sqrt{x+1} \text{ si } x \leq 0\right\}$. **Se pide:**

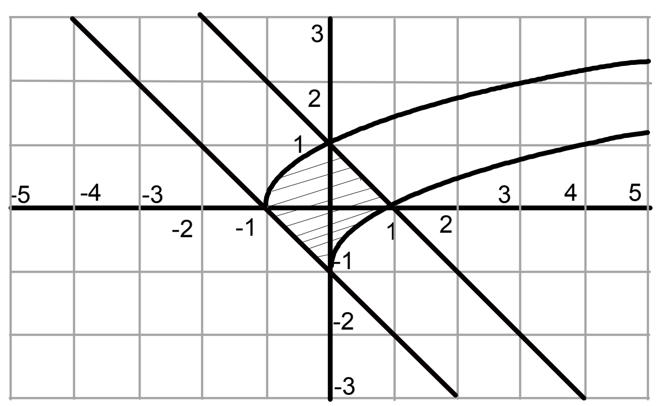
a) Representar el conjunto A.

b) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ el orden de Pareto definido por $(x_0,y_0) \leq_P (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$. Hallar el conjunto de puntos maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

1 punto

---

a) La gráfica de la función $y = \sqrt{x} - 1$ es el resultado de trasladar, verticalmente hacia abajo, una unidad la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$. De la misma forma, la gráfica de la función $y = \sqrt{x+1}$ es el resultado de trasladar la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ una unidad a la izquierda. Por último, el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq 1\}$ es la banda que se encuentra entre las rectas $x+y = -1$ y $x+y = 1$. De esta forma, observando que la recta $x+y = -1$ corta a las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x} - 1$, $y = \sqrt{x+1}$ en los puntos (-1, 0) y (0, -1), y que la recta $x+y = 1$ corta a las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x} - 1$, $y = \sqrt{x+1}$ en los puntos (1, 0) y (0, 1), entonces el conjunto A tiene la forma siguiente:



b) Maximales (A) = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 1, 0 \leq x,y \leq 1\}$, luego no existe máximo de A.
Minimales (A) = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = -1, -1 \leq x,y \leq 0\}$, luego no existe mínimo de A.

2. **Dada la función** $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$**, se pide:**

a) Calcular el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y/o mínimos de la función $f(x)$.

c) Representar la gráfica de $f(x)$.

1,5 puntos

---

a) Dominio (f) $=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x+1\}$. Por tanto, la función f no puede tener asíntotas en $-\infty$.

Por otra parte, como f es continua en todo su dominio, el único punto donde f puede tener asíntota vertical es en $x = -1$. De esta forma, calculamos:

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$. Luego f tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Asíntota en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/(1+x)}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\infty} = 0$. Luego f tiene una asintota horizontal en $+\infty$ y, por tanto, ninguna oblícua.

b) Como $f'(x) = \dfrac{(\frac{1}{1+x}).(1+x) - 1.\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$, obtenemos que

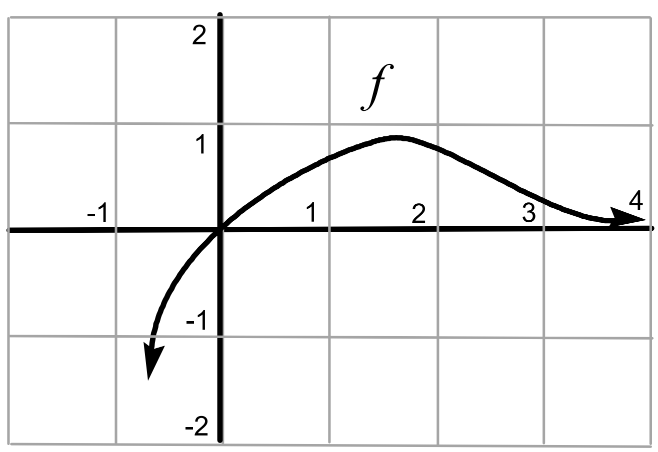
$f'(x) > 0 \iff \ln(1+x) < 1 \iff 1+x < e \iff x < e-1$.

$f'(x) = 0 \iff \ln(1+x) = 1 \iff 1+x = e \iff x = e-1$.

$f'(x) < 0 \iff \ln(1+x) > 1 \iff 1+x > e \iff x > e-1$.

Luego f es creciente en el intervalo $(-1, e-1)$, alcanza un máximo local (y global) en $x = e-1$, y es decreciente en el intervalo $(e-1, \infty)$.

c) Con los datos de las partes a) y b), y observando que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, la gráfica de f sería, aproximadamente así:



3. **Dada la función definida por** $f(x) = \begin{cases} ax+b & si\, x \le 1 \\ \dfrac{10}{x} & si\;\; 1 < x < c \\ -x^2 & x \ge c \end{cases}$

a) Hallar a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$.

b) Discutir, según los valores de c, cuando la función $f(x)$ será derivable en $x = c$.

1 punto

---

a) Para que $f(x)$ sea derivable en x=1, es condición necesaria y suficiente que sea continua en ese punto y que las derivadas laterales coincidan. Así pues:

$f(x)$ continua en $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} ax+b = a+b = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{10}{x} = 10;$ y, suponiendo que $f(x)$ sea continua en dicho punto: $f(x)$ derivable en $x = 1 \Leftrightarrow D_-f(1) = a = D_+f(1) = -10.$ Luego $f(x)$ es derivable en $x = 1 \Longleftrightarrow a = -10, b = 20.$

b) De la misma forma, para que $f(x)$ sea derivable en x=c, es condición necesaria que $f(x)$ sea continua en ese punto, y eso es imposible, pues $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \dfrac{10}{c} > 0,$ mientras que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c) = -c^2 < 0.$

4. **Sea la función** $f(x) = e^{bx^2} + c$ **, siendo** b, c **números reales cualquiera. Se pide:**

a) Hallar el polinomio de Taylor, de orden 2, correspondiente a $f(x)$, centrado en el punto $a = 0$.

b) Estudiar, dependiendo de los valores de los parámetro b y c, si la función f alcanza un máximo o mínimo local en el punto $x = 0$.

c) En los casos en los que $f(x)$ alcanza un máximo o mínimo local en $x = 0$, ¿alcanzará $f(x)$ un máximo o mínimo global en dicho punto?

1'5 puntos

a) En primer lugar, $f(0) = 1 + c$.

En segundo lugar, como $f'(x) = 2bxe^{bx^2}, f'(0) = 0$.

Por último, como $f''(x) = 2be^{bx^2} + (2bx)^2 e^{bx^2}, f''(0) = 2b$. Por tanto, el polinomio de Taylor solicitado será:

$$P(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 = 1 + c + bx^2.$$

b) Obviamente, si $P(x)$ alcanza un mínimo local en $x = 0 \Rightarrow f(x)$ alcanza un mínimo local en dicho punto, luego

si $b > 0 \Rightarrow P(x)$ alcanza un mínimo local en $x = 0 \Rightarrow f(x)$ alcanza un mínimo local en $x = 0$.

Análogamente, si $P(x)$ alcanza un máximo local en $x = 0 \Rightarrow f(x)$ alcanza un máximo local en dicho punto, luego

si $b < 0 \Rightarrow P(x)$ alcanza un máximo local en $x = 0 \Rightarrow f(x)$ alcanza un máximo local en $x = 0$.

En el caso $b = 0$ el polinomio de Taylor no nos da ninguna información. Debemos acudir a la función, que resulta ser la función constante $f(x) = 1 + c$, por lo cual tanto se puede considerar que $f(x)$ alcanza en $x = 0$ un máximo local (trivial) como que no (y lo mismo sucede para el caso de mínimo local).

c) Supongamos primero el caso $b > 0$. Como tanto el límite de $f(x)$ en $-\infty$ como en $+\infty$ es ∞, y como $x = 0$ es el único punto crítico de $f(x)$, entonces $x = 0$ es el mínimo global de $f(x)$.

De la misma forma, consideremos a continuación el caso $b < 0$. Como tanto el límite de $f(x)$ en $-\infty$ como en $+\infty$ es c, y como en $x = 0$, el único punto crítico de $f(x)$, $f(0) = 1 + c > c$, entonces $x = 0$ es el máximo global de $f(x)$.

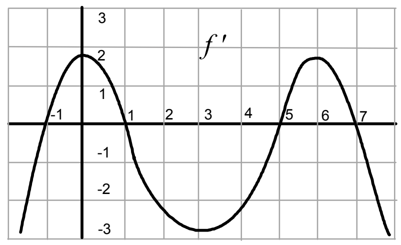
5. **La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de** f.

a) Hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales de f.

b) Hallar los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de f.

c) Considérese f definida en $[-1,2]$. ¿Qué puedes decir acerca de los extremos globales de f en dicho intervalo? ¿En qué teorema o teoremas te basas?

1,5 puntos



a) $f(x)$ es creciente en aquellos intervalos donde $f'(x) > 0$. Así pues, f es creciente en el intervalo $(-1,1)$ y en $(5,7)$.

Análogamente $f(x)$ es decreciente en aquellos intervalos donde $f'(x) < 0$. Así pues, f es decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)$, en $(1,5)$ y en $(7,\infty)$.

Por lo tanto, $f(x)$ alcanza máximos locales en $x = 1$ y en $x = 7$ y, de la misma forma $f(x)$ alcanza mínimos locales en $x = -1$ y en $x = 5$.

(Observación: se considera correcto sustituir $-\infty$ por -2 y ∞ por 8).

b) $f(x)$ es convexa en aquellos intervalos donde $f'(x)$ es creciente. Así pues, f es convexa en el intervalo $(-\infty,0)$ y en $(3,6)$.

Análogamente $f(x)$ es cóncava en aquellos intervalos donde $f'(x)$ es decreciente. Así pues, f es cóncava en el intervalo $(0,3)$ y en $(6,\infty)$.

Por lo tanto, los puntos de inflexión de $f(x)$ se hallan en $x = 0$, $x = 3$ y en $x = 6$.

(Observación: se considera correcto sustituir $-\infty$ por -2 y ∞ por 8).

c) Como $f(x)$ es continua en el intervalo [-1,2], entonces, por el teorema de Weierstrass, $f(x)$ alcanza un máximo y un mínimo global en dicho intervalo.

Por otra parte, $f(x)$ es creciente en el intervalo [-1,1] y decreciente en el intervalo [1,2]. Luego $f(x)$ alcanzará su máximo global en $x = 1$, y su mínimo global en $x = -1$ o en $x = 2$ (el problema no proporciona datos suficientes para determinar en cuál de esos dos puntos).

6. **Sean** $C(x) = C_0 + x + 0,01x^2$ **y** $p(x) = 31 - \frac{x}{50}$ **las funciones de coste y de demanda, respectivamente, de una empresa monopolista. Se pide:**

a) Hallar la producción x donde se alcanza el máximo beneficio.
b) Hallar C_0 para que $x = 100$ minimice el coste medio.
c) Hallar el valor del coste marginal en $x = 100$. ¿Qué significado económico tiene ese valor?

1'5 puntos

---

a) Como $B(x) = (31 - \frac{x}{50})x - (C_0 + x + 0,01x^2) = -0'03x^2 + 30x - C_0$ es una función cóncava, alcanzará su máximo en el punto crítico, siempre y cuando en dicho punto el precio sea positivo. Así pues,

$B'(x) = -0'06x + 30 = 0 \Longleftrightarrow 0'06x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{0'06} = \frac{3000}{6} = 500.$

Así pues, $B(x)$ será máximo cuando $x = 500$, pues $p(500) = 21 > 0$.

b) Como la función de costes medios $\frac{C(x)}{x} = \frac{C_0}{x} + 1 + 0'01x$ es una función convexa (para $x > 0$), el valor mínimo se alcanzará en el único punto crítico, es decir, cuando

$(\frac{C(x)}{x})' = \frac{-C_0}{x^2} + 0'01 = 0 \Leftrightarrow \frac{C_0}{x^2} = 0'01 \Leftrightarrow C_0 = 0'01x^2,$ y como $x = 100,$ entonces

$C_0 = 0'01(100)^2 = 100.$

c) $C'(x) = 1 + 0'02x,$ luego $C'(100) = 3.$ ¿Qué significa este valor? Pues que el coste adicional de producir una unidad más, esto es $C(101) - C(100)$ es, aproximadamente 3, ya que, según el teorema del valor medio,

$C(101) - C(100) = C'(x).(101 - 100) = C'(x),$ siendo x un valor entre 100 y 101.

Por lo tanto, $C'(x)$ es, aproximadamente, $C'(100) = 3.$ De hecho,
$C(101) - C(100) = 101 + 0'01(100^2 + 200 + 1) - 100 - 0'01(100^2) = 3'01.$

El mismo razonamiento se aplica al coste adicional que se realizó al producir la última unidad, esto es, para calcular aproximadamente el valor de $C(100) - C(99)$.

7. **Dada la función** $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2}$**, se pide:**

a) De todas las primitivas de dicha función $f(x)$, hallar aquella que tenga como asíntota oblícua la recta $y = 3x - 2$.

b) Dada $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$, hallar los valores de x donde F alcanza un máximo o un mínimo local. Justificar la respuesta.

1 punto

---

a) Como $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2} = 3 - \dfrac{3}{(x-1)^2}$, entonces $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2} = 3x + \frac{3}{(x-1)} + C$. Luego, para que la recta $y = 3x - 2$ sea la asíntota oblícua de $f(x)$ hace falta que se cumpla $C = -2$.

b) Como $F'(x) = f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2} = \dfrac{3x(x-2)}{(x-1)^2}$, y el denominador es positivo excepto en $x = 1$, el signo de $F'(x)$ viene determinado por el numerador, que es positivo en los intervalos $(-\infty, 0)$ y en $(2, \infty)$; y negativo en el intervalo $(0, 2)$.

Por lo tanto, $F(x)$ alcanzara un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 2$.

Como observación, debe hacerse notar que, para cualquier primitiva $F(x)$ de $f(x)$, $F(1)$ no está definida, luego $F(x)$ no puede alcanzar ningún extremo local en $x = 1$.

8. **Dadas las funciones** $f(x) = e^{x-2}$, $g(x) = e^{-x-2}$, **se pide**:

a) Dibujar el recinto encerrado entre las gráficas de dichas funciones y las rectas $x = 2$, $x = -2$.

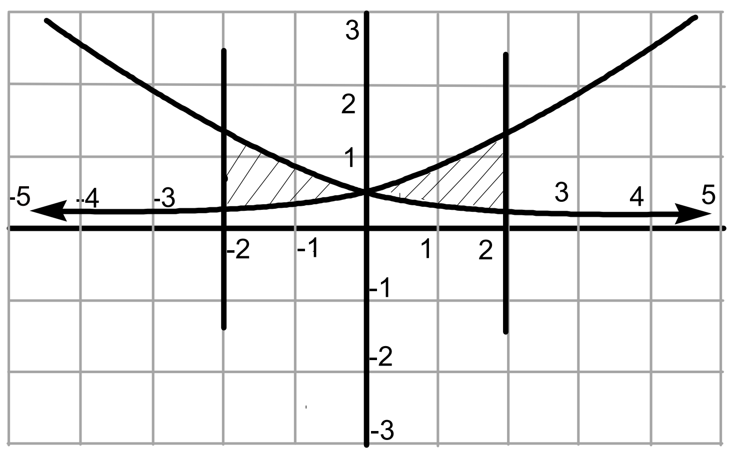
b) Hallar el área de dicho recinto.

1 punto

a) Para hallar el recinto que nos piden, debemos observar que la función $f(x) = e^{x-2}$es creciente, la función $g(x) = e^{-x-2}$ es decreciente, que ambas son positivas y que se cortan en el punto:

$f(x) = e^{x-2} = e^{-x-2} = g(x)$, esto es, cuando $x - 2 = -x - 2 \Leftrightarrow x = 0$.

Por último, para determinar los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ con las rectas $x = 2$ y $x = -2$, basta observar que $f(2) = g(-2) = 1$, $f(-2) = g(2) = e^{-4}$, es decir, un valor entre 0 y 1. De esta forma, el dibujo aproximado del citado recinto sería el siguiente:



b) Área $= \int_{-2}^{0} (g(x) - f(x))dx + \int_{0}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{0} (e^{-x-2} - e^{x-2})dx + \int_{-2}^{0} (e^{x-2} - e^{-x-2})dx =$

Y, por la simetría de la figura:

$= 2\int_{0}^{2} (e^{x-2} - e^{-x-2})dx = 2[e^{x-2} + e^{-x-2}]_0^2 = 2(1 + e^{-4} - 2e^{-2})$.