Tema 4

Aplicaciones de la derivada

4.1 Derivadas de orden superior

Si f es derivable en un intervalo abierto (a, b), entonces la derivada de f es una nueva función, $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Nada impide preguntarnos por la derivada de f'. Si existe, esta será la *segunda derivada* de f y escribiremos $(f')' = f''$. La *tercera derivada* de f es $(f'')' = f'''$ y podemos continuar de esta forma para definir derivadas de cualquier orden n. La derivada de orden n se escribe de manera general como $f^{n)}$, pero para valores concretos de n utilizamos la notación: f', f'', f''', f^{iv}, f^{v}, $\ldots$, es decir, números romanos desde la derivada cuarta en adelante.

Diremos que una función es de clase C^1 si su primera derivada es continua, de clase C^2 si su segunda derivada es continua, etc. Es de clase C^∞ si las derivadas de cualquier orden de f son funciones continuas. Todas las funciones elementales son de clase C^∞ en su dominio.

Ejemplo 4.1.1. Dada la función $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 1$, tenemos que sus derivadas sucesivas son: $f'(x) = 16x^3 - 4x$, $f''(x) = 48x^2 - 4$, $f'''(x) = 96x$, $f^{(4)}(x) = 96$ y $f^{(n)}(x) = 0$ para todo $n \geq 5$.

Ejemplo 4.1.2. La función $g(x) = x^{3/2}$ está definida y es continua en toda la recta real. Su derivada es $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, que también está definida y es continua en toda la recta real. La derivada segunda sin embargo es $g''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}$, que no está definida en 0. Por tanto, g es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}$, pero no de clase C^2 en $\mathbb{R}$. Por supuesto, si eliminamos el punto problemático, podremos decir que g es de clase C^∞ en $(0, \infty)$.

4.2 Polinomio de Taylor

4.2.1 Polinomio de Taylor de orden 2

Observación: la recta tangente o polinomio de Taylor de orden 1:

$$y = P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a).(x - a)$$

se caracteriza porque cumple:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{(x-a)}=0$$

como se puede comprobar por la regla de L'Hopital.

Pues bien, a partir del límite anterior podemos definir el polinomio de Taylor.

Definición 4.2.1. El polinomio de Taylor de orden n viene caracterizado por ser el único polinomio de grado $\leq n$ que cumple: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0$.

Del límite anterior, cuando $n=2$, se deduce:

Teorema 4.2.2. $P_{2,a}(x)=f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f"(a)}{2}(x-a)^2$

Demostración : Usar la regla de L'Hopital.

Observación: las derivadas primera y segunda del polinomio de Taylor de orden 2 coinciden con las derivadas de la función.

4.2.2 Aproximación de segundo orden

El polinomio de Taylor, es la parábola tangente a f (si $f"(a)\neq 0$). ¿Para qué sirve el polinomio de Taylor, si $f"(a)\neq 0$? Es decir, ¿para qué sirve la parábola tangente?

1. Para conocer la posición relativa de la gráfica de f respecto a la recta tangente.
2. Además, si $f\ '(a)=0$, para el estudio de los extremos locales, mediante el signo de $f"(a)$.

   Supongamos $f'(a)=0, f"(a)\neq 0$. Si el polinomio tiene extremo local, f lo tiene. Obviamente, si la función no lo tiene, el polinomio tampoco.

   Ver también sección 4.3.
3. Para obtener mejores aproximaciones.

   Ejemplo 4.2.3. Hallar aproximadamente $\ln(0,9)$ y $\ln(1,2)$ utilizando:

   a) el polinomio de $f(x)=\ln(1+x)$ en $a=0$: $\ln(1+x)\approx x-x^2/2$; o bien

   b) el polinomio de $f(x)=\ln(x)$ en $a=1$: $\ln(x)\approx(x-1)-(x-1)^2/2$

4.3 Condiciones de optimalidad de segundo orden

Sea f una función de clase C^2 en un intervalo abierto centrado en el punto c

Condiciones necesarias de segundo orden

- $f(c)$ es un mínimo local de $f\Rightarrow f''(c)\geq 0$;
- $f(c)$ es un máximo local de $f\Rightarrow f''(c)\leq 0$.

Condiciones suficientes de segundo orden

Sea c tal que $f'(c)=0$.

- $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ mínimo local estricto de f;
- $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ máximo local estricto de f.

Ejemplo 4.3.1. Sea $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 16x^3 - 4x$ y $f''(x) = 48x^2 - 4$. El punto $c = 0$, ¿ puede ser un minimizador local de f? No, ya que $f''(0) = -4 < 0$. ¿ Es $c = 0$ un maximizador local de f? Sí, ya que es punto crítico, $f'(0) = 0$ y $f''(0)$ es negativo, como hemos calculado antes. ¿Tiene f otros extremos? Calculamos todos los puntos críticos: $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{2}$. Como, $f''(\pm\frac{1}{2}) = 8 > 0$, entonces ambos $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ son minimizadores locales.

Ejemplo 4.3.2. Sea $f(x) = 4x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 1$. Vamos a estudiar sus extremos locales mediante la primera y la segunda derivada. Tenemos que $f'(x) = 16x^3 - 8x^2$ y $f''(x) = 48x^2 - 16x$. Los puntos crı'ticos son $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$. Dado que $f''(0) = 0$, no podemos concluir nada con el criterio de la derivada segunda. Por otra parte, $f''(\frac{1}{2}) = \frac{48}{4} - \frac{16}{2} = 12 - 8 = 4 > 0$, luego $\frac{1}{2}$ es minimizador local de f. Si queremos saber el carácter de 0, podemos acudir al test de la derivada primera, como $f'(-1) < 0$, $f'(1/4) < 0$, luego f es decreciente si $x < \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $x = 0$ no es ni maximizador ni minimizador local.

4.4 Concavidad/convexidad y puntos de inflexión

Si la función f es derivable en cada punto de un intervalo (a, b), entonces la gráfica de f admite en cada punto $(x, f(x))$ con $x \in (a, b)$ una recta tangente que no es vertical.

Definición 4.4.1. Se dice que la función f es convexa (cóncava) en el intervalo (a, b) si en el intervalo (a, b) las rectas tangentes a la gráfica de f están por debajo o tocan (están por encima o tocan) a la gráfica de f.

Hay funciones que no son convexas ni cóncavas. Las únicas funciones que son a la vez convexas y cóncavas son las que tienen como gráfica una recta.

Teorema 4.4.2 (Caracterización de la concavidad o convexidad mediante la derivada)**.**

1. *f es convexa en I si y solo si su derivada es creciente en dicho intervalo.*
2. *f es cóncava en I si y solo si su derivada es decreciente en dicho intervalo.*

Teorema 4.4.3 (Condición suficiente de concavidad/convexidad)**.** *Supongamos que f es dos veces derivable en (a, b).*

1. *Si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es convexa en (a, b);*
2. *Si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava en (a, b).*

Teorema 4.4.4 (Extremos globales de funciones cóncavas o convexas)**.**

1. *Si f es convexa en I y c es un punto crítico de f, entonces c es un minimizador global de f en I.*

2. *Si f es cóncava en I y c es un punto crítico de f, entonces c es un maximizador global de f en I.*

Definición 4.4.5. Un punto c en el que la función f cambia de convexa a cóncava o viceversa es un punto de inflexión de f.

Teorema 4.4.6 (Condición necesaria de punto de inflexión)**.** *Si f tiene un punto de inflexión en c y f es clase C^2 en un intervalo abierto alrededor de c, entonces $f''(c) = 0$.*

Teorema 4.4.7 (Condición necesaria de punto de inflexión)**.** *Si f es dos veces derivable en un intervalo alrededor de c, $f''(c) = 0$ y el signo de f'' cambia al pasar por c, entonces c es un punto de inflexión de f.*

Si f es tres veces derivable, el teorema puede simplificarse a: si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, entonces c es un punto de inflexión de f.

Ejemplo 4.4.8. Hallar los intervalos de concavidad/convexidad de $f(x) = (x+6)^3(x-2)$ y sus puntos de inflexión

Solución: El dominio de f es todo $\mathbb{R}$ y la función dos veces derivable. Además

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x+6)^2(x-2) + (x+6)^3 = (x+6)^2(3(x-2) + (x+6)) = (x+6)^2(4x), \\ f''(x) &= 8(x+6)x + 4(x+6)^2 = 4(x+6)(2x + (x+6)) = 12(x+6)(x+2). \end{aligned}$$

Luego $f'' \geq 0$ cuando $x \geq -2$ y cuando $x \leq -6$, $f'' \leq 0$ en $[-6, -2]$. Luego f es convexa en $(-\infty, -6]$ y en $[-2, +\infty)$, y es cóncava en $[-6, -2]$. Los puntos -6 y -2 son de inflexión.

4.5 Aplicaciones de la derivada en teoría de la empresa

4.5.1 Ingreso, coste y beneficio marginal

En economía aplicada, cuando hablamos de coste marginal de un producto, siendo x el nivel de producción, nos podemos referir al coste adicional de producir la última unidad, en cuyo caso el coste marginal vendría dado por la fórmula:

$$C(x) - C(x-1) = C'(\alpha_x)$$

donde $\alpha_x \in (x-1, x)$, por el teorema de Lagrange.

Por otro lado, cuando hablamos de coste marginal de un producto, siendo x el nivel de producción, nos podemos referir al coste adicional de producir una unidad más, en cuyo caso el coste marginal vendría dado por la fórmula:

$$C(x+1) - C(x) = C'(\beta_x)$$

donde $\beta_x \in (x, x+1)$, por el teorema de Lagrange.

En esta asignatura, cuando hablamos de coste marginal nos referimos siempre a la derivada de la función de costes. Si aceptamos que la derivada de la función de costes es bastante estable, los tres conceptos tienen valores aproximados, ya que podemos suponer que:

$$C'(\alpha_x) \approx C'(x) \approx C'(\beta_x)$$

Observación: las aproximaciones anteriores pueden afinarse así:

$C(x) - C(x-1) = C'(\alpha_x) < C'(x) < C'(\beta_x) = C(x+1) - C(x)$

sin más que suponer que $C(x)$ es convexa, lo que suele suceder. Y, por tanto, su derivada es creciente.

Lo mismo que hemos definido para la función de costes se puede hacer para la función de beneficios, pues:

$$B(x) - B(x-1) = B'(\alpha_x) \approx B'(x) \approx B'(\beta_x) = B(x+1) - B(x)$$

Análogamente al caso anterior, las aproximaciones anteriores pueden afinarse así:

$B(x) - B(x-1) = B'(\alpha_x) > B'(x) > B'(\beta_x) = B(x+1) - B(x)$ sin más que suponer que $B(x)$ es cóncava, lo que suele suceder. Y, por tanto, su derivada es decreciente.

4.5.2 Comportamientos de la empresa: minimización del coste medio-maximización del beneficio

1. $\dfrac{C(x)}{x}$, la función de costes medios es, en general, convexa; luego su mínimo se alcanza en el punto x_0 que satisface:

   $$\left(\frac{C(x)}{x}\right)'(x_0) = 0$$

   Observación: x_0 ha de ser positivo, superior a la producción mínima (si la hay) e inferior a la producción máxima (si la hay).

   Observación: una empresa que persiga la minimización del coste medio lo que esta buscando en realidad es que la probabilidad de que haya beneficios sea máxima, dado que esta empresa tiene incertidumbre sobre cual será el precio de venta de su producto. Téngase en cuenta que la empresa tiene beneficios cuando:

   $$B(x) = x \cdot p(x) - C(x) > 0 \Longleftrightarrow p(x) > \frac{C(x)}{x}$$

   de ahí que dicha empresa busque que $\frac{C(x)}{x}$ tome un valor lo más pequeño posible.

2. $B(x)$, la función de beneficios es, en general, cóncava; luego su máximo se alcanza en el punto x_0 que satisface:

   $$B'(x_0) = 0$$

   Observación: x_0 ha de ser positivo, superior a la producción mínima (si la hay) e inferior a la producción máxima (si la hay).

   Observación: una empresa que persiga la maximización del beneficio tiene un conocimiento cierto de cual será el precio $p(x)$ al cual venderá su producción x.

   Solo las empresas con una posición casi monopolista en el mercado en el que operan pueden tener esa certidumbre.

4.5.3 Problemas de optimización

Necesitamos recordar los conceptos de función de ingreso R, función de costes C, y función de beneficios, Π de una empresa monopolista estudiados en la lección dedicada a la continuidad de funciones. Denotábamos allí mediante $P(x)$ la función inversa de la demanda, y por x la cantidad del bien que produce y vende la empresa en el mercado. Consideramos tres problemas diferentes de optimización.

Problema del propietario: maximizar beneficios

$$\max \Pi(x) \quad \text{sujeto a las condiciones de factibilidad de } x.$$

Problema del jefe de ventas: maximizar los ingresos

$$\max R(x) \quad \text{sujeto a las condiciones de factibilidad de } x.$$

Problema del jefe de almacén: minimizar el coste medio

$$\min \frac{C(x)}{x} \quad \text{sujeto a las condiciones de factibilidad de } x.$$

Sean

$$\begin{aligned} P(x) &= A - Bx; \\ C(x) &= c + ax + bx^2, \end{aligned}$$

donde $A > 0$, $B > 0$, $b > 0$, $c \geq 0$ y $A \geq a$. Tenemos

$$\begin{aligned} R(x) &= xP(x) = x(A - Bx); \\ \Pi(x) &= R(x) - C(x) = x(A - Bx) - (c + ax + bx^2); \\ \overline{C}(x) &= \frac{C(x)}{x} = \frac{c}{x} + a + bx. \end{aligned}$$

Se supone que no hay restricciones de producción, de manera que la empresa puede producir el bien en cualquier cantidad x.

- Problema del propietario.

  $$\Pi'(x) = A - 2Bx - a - 2bx = 0 \Rightarrow x^* = \frac{A - a}{2(B + b)}.$$

  Dado que

  $$\Pi''(x) = -2(B + b) < 0,$$

  la función de beneficios es estrictamente cóncava, luego x^* maximiza beneficios (x^* es máximo global único).

- Problema del jefe de ventas.

$$R'(x) = A - 2Bx = 0 \Rightarrow x^{**} = \frac{A}{2B}.$$

Dado que

$$R''(x) = -2B < 0,$$

la función de ingresos es estrictamente cóncava, luego x^{**} maximiza beneficios (x^{**} es máximo global único)

- Problema del jefe de almacén.

$$\overline{C}'(x) = -\frac{c}{x^2} + b = 0 \Rightarrow x^{***} = \sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Dado que

$$\overline{C}''(x) = \frac{2c}{x^3} > 0,$$

el coste medio de producción es estrictamente convexo, luego x^{***} minimiza el coste medio (x^{***} es mínimo global único).