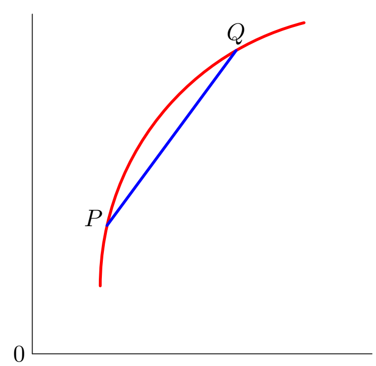
Tema 3

Derivadas

3.1 Derivada de una función. Derivada de las funciones elementales y reglas de derivación

3.1.1 Pendiente de una curva

La pendiente de una curva en un punto P de la curva, es una medida de la inclinación de la curva en ducho punto. Si Q es otro punto de la curva próximo a P, entonces puede decirse que la pendiente de la curva en P es aproximadamente la pendiente del segmento que une P y Q, $\overline{PQ}$. La *pendiente de la curva* en P se define como el límite de de las pendientes de los segmentos $\overline{PQ}$ a medida que Q tiende a P.



Es decir, pendiente de la curva en $P = \lim_{Q \to P}(\text{pendiente de } \overline{PQ})$.

Para calcular la pendiente de la curva $y = x^2$ en el punto $P = (1,1)$ elegimos puntos Q sobre la curva muy próximos a P. Una forma de hacer esto es tomar $Q = (1+h, (1+h)^2)$ con h tendiendo a 0. Entonces, de acuerdo a la definición

$$\text{pendiente de } \overline{PQ} = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} = 2 + h$$

y tomando $h \to 0$, Q tiende a P, de manera que

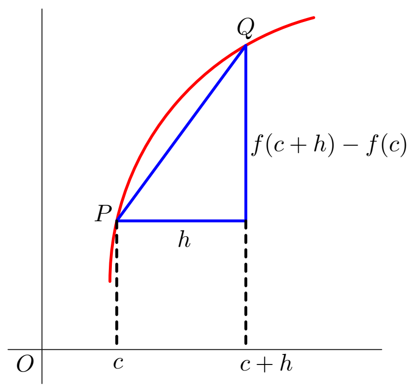
$$\text{pendiente de la curva en } (1,1) = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2.$$

Definición 3.1.1. La derivada de la función f en el punto c, $f'(c)$, es la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$, es decir:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

siempre que este límite exista.

Diremos que f es *derivable* en c si $f'(c)$ existe.



3.1.2 Tabla de derivadas de las funciones elementales

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α es un número real).
2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, en particular $(e^x)' = e^x$.
4. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
6. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, siempre que $\cos x \neq 0$.
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.
9. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3.1.3 Recta tangente a una curva

La recta tangente a una curva en un punto es la recta que pasa por dicho punto y que tiene la misma pendiente que la curva en en el punto. Por tanto,

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

es la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $P = (c, f(c))$ de la curva.

Ejemplo 3.1.2.

1. Hallar la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $(16, 4)$.

   Solución: $f(x) = x^{1/2}$, $\quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $\quad f'(16) = \frac{1}{8}$.
   Por tanto, $y - 4 = \frac{1}{8}(x - 16)$, o $y = \frac{1}{8}x + 2$.

2. Hallar la recta tangente a la curva $y = |x|$ en $(0, 0)$.

   Solución: No existe recta tangente a $y = |x|$ en $(0, 0)$, dado que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en 0. Para comprobar esto, notar que el límite

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

   no existe por la izquierda vale -1, pero por la derecha 1).

3.1.4 Derivadas laterales

Si existe el límite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \qquad \left(\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \right),$$

se dice que es la derivada por la derecha (por la izquierda) de la función f en el punto c y se denota $f'(c^+)$ $(f'(c^-))$.

Teorema 3.1.3. *f es derivable en c si y sólo si ambas derivadas laterales $f'(c^+)$ y $f'(c^-)$ existen y son iguales. En este caso, $f'(c) = f'(c^+) = f'(c^-)$.*

Ejemplo 3.1.4. Determinar si la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0; \\ xe^{-1/x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ es derivable en 0?

Solución: Sí, y su derivada es $f'(0) = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2}{h} = 0;$$
$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{he^{-1/h}}{h} = e^{-\infty} = 0.$$

3.1.5 Relación entre continuidad y derivabilidad

La continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad. Dicho de otra forma, una función derivable es continua.

Teorema 3.1.5. *Sea f una función derivable en c. Entonces es continua en c.*

Proof. La hipótesis del teorema afirma que existe el límite

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Vamos a probar, utilizando este hecho, que f es continua en c. Lo habremos conseguido si probamos que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Pero

$$\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c}(x - c)\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left(\lim_{x \to c}(x - c)\right)\left(\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right) = 0 \cdot f'(c) = 0.$$

□

Ejemplo 3.1.6. Discutir la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} ax - x^2, & \text{si } x < 1; \\ b(x-1), & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: Por el resultado anterior, conviene primero estudiar si f es continua. El dominio de f es todo $\mathbb{R}$. Para $x < 1$ y $x > 1$, f está dada por funciones elementales, que son continuas. En el punto $x = 1$ hay que hacer un estudio detallado. Tenemos que $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} ax - x^2 = a - 1$. Luego f es continua en 1 si y sólo si $a = 1$, para cualquier valor de b. En cuanto a si es diferenciable, claramente lo es en cualquier punto $x \neq 1$. de hecho, la derivada es $f'(x) = a - 2x$ si $x < 1$ y $f'(x) = b$ si $x > 1$. En $x = 1$, la función no es derivable si $a \neq 1$, ya que no es continua. Cuando $a = 1$, calculamos

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h) - (1+h)^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h) - (1+2h+h^2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - h^2}{h} = -1; \\ f'(1^+) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{b(1+h-1)}{h} = b. \end{aligned}$$

Luego $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1)$ si y sólo si $b = -1$. Es decir, que si $a = 1$ y $b \neq -1$, entonces f no es derivable en 1, pero si $a = 1$ y $b = -1$, f es derivable y $f'(1) = -1$.

3.1.6 Reglas de derivación

Sean f y g funciones derivables en el punto c. la suma, la diferencia, el producto por un escalar, el producto y el cociente de funciones son derivables en c, y la derivada se calcula como se indica.

1. Suma: $(f + g)' = f' + g'$;
2. Diferencia: $(f - g)' = f' - g'$;
3. Producto por un escalar: $(\lambda f)' = \lambda f'$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. Producto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
5. Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $g(c) \neq 0$.

3.1.7 Regla de la cadena

(derivada de la función compuesta). Sean f derivable en c y g derivable en $f(c)$. la composición $g \circ f$ es derivable en c y la derivada es

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Ejemplo 3.1.7. Hallar la derivada de $y = \operatorname{sen}(3^x + x^3)$.

Solución:

$$y' = (\operatorname{sen} t)'|_{t=3^x+x^3}(3^x + x^3)' = \cos(3^x + x^3)(3^x \ln 3 + 3x^2).$$

Ejemplo 3.1.8. Hallar la derivada de $h(x) = \sqrt{e^x - x^2}$ en el punto $c = 1$.

Solución:

$$h'(x) = \left((e^x - x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - x^2)^{-\frac{1}{2}}(e^x - x^2)' = \frac{1}{2}(e^x - x^2)^{-\frac{1}{2}}(e^x - 2x).$$

Luego $h'(1) = \frac{e-2}{2\sqrt{e-1}}$, aproximadamente 0.274.

Ejemplo 3.1.9. En las propiedades que siguen, f es derivable.

- $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$;
- $\left(a^{f(x)}\right)' = (\ln a)f'(x)a^{f(x)}$.
- $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$;
- $(\arctan f(x))' = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$.

3.1.8 Derivada de la función inversa

. Sea f continua e inyectiva en un intervalo abierto alrededor de x, $(x - \delta, x + \delta)$ y tal que f es derivable en x. Entonces f^{-1} es derivable en $y = f(x)$ y la derivada es

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{3.1.1}$$

La demostración de la fórmula es una consecuencia fácil de la regla de la cadena aplicada a la identidad

$$x = f^{-1}(f(x)),$$

que se cumple por definición de la inversa de f. Tenemos

$$1 = \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x).$$

la fórmula se sigue de esto al substituir $y = f(x)$.

Ejemplo 3.1.10. Demostrar que $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Solución: La función $\arctan x$ es la inversa de $\tan x$. De acuerdo a la fórmula (3.1.1), tenemos

$$\arctan' y = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

porque $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, y donde $y = \tan x$. Luego,

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Podemos intercambiar el nombre de las variables x, y para obtener el resultado.

3.1.9 La derivada como una herramienta de aproximación

La recta tangente a una curva en un punto $(c, f(c))$ constituye una buena aproximación a la curva para valores (x, y) cercanos al punto $(c, f(c))$. De hecho, puede demostrarse que la recta tangente es la mejor aproximación a la gráfica de la función de entre todas las rectas posibles que pasan por el punto en cuestión.

Utilizando la expresión de la recta tangente $y - f(c) = f'(x)(x-c)$, para valores pequeños del incremento $h = x - c$, el valor de $y = f(c+h)$ puede aproximarse de manera eficiente por los valores conocidos de $f(c)$ y $f'(c)$:

$$f(c+h) \approx f(c) + f'(c)h. \tag{3.1.2}$$

Otra forma de expresar esto es mediante incrementos: el incremento en el valor de f, Δy, es aproximadamente el incremento en x, $h = \Delta x$, multiplicado por $f'(c)$:

$$\Delta y \approx f'(c)\Delta x.$$

Ejemplo 3.1.11. Sin usar una calculadora, dar un valor aproximado de $\sqrt{0.98}$.

Solución:

Consideremos la función $f(x) = \sqrt{1+x}$. Observamos que $f(0) = 1$,

$f(-0.02) = \sqrt{0.98}$, $f\ '(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f\ '(0) = 0.5$. Encontramos a partir de la fórmula (3.1.2) que $c = 0$ y $h = -0.02$ que $\sqrt{0.98} = f(0 - 0.02) \approx f(0) + f\ '(0).(-0.02) = 1 + 0.5(-0.02) \approx 0.99$.

Ejemplo 3.1.12. Hallar, sin usar calculadora, un valor aproximado de $\sqrt{177}$.

Solución:

Claramente, debemos escoger $f(x) = \sqrt{x}$. Como punto base c, uno que sea cuadrado perfecto (para que sepamos calcular su raíz cuadrada de forma inmediata) y que esté tan próximo a 177 como sea posible (para que el incremento sea lo menor posible). El candidato es $c = 169$, pues $\sqrt{169} = 13$. La derivada de f en $c = 169$ es

$$f'(169) = \frac{1}{2\sqrt{x}}_{|x=169} = \frac{1}{2\sqrt{169}} = \frac{1}{26}.$$

Luego

$$\sqrt{177} = \sqrt{169+8} = f(169+8) \approx f(169) + f'(169)8 = 13 + \frac{8}{26} \approx 13.307.$$

El valor correcto con 3 decimales es 13.304.

3.1.10 Derivación implícita

Definición 3.1.13. Una ecuación $F(x, y) = 0$ define $y = f(x)$ de forma implícita cerca del punto (x_0, y_0) cuando se cumple:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. si (x, y) está cerca del punto (x_0, y_0) : $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$.

Teorema 3.1.14. $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Longrightarrow$
La ecuación $F(x, y) = 0$ define $y = f(x)$ de forma implícita cerca del punto (x_0, y_0) .

Teorema 3.1.15. $y_0' = f\,'(x_0)$ *puede hallarse a partir de la ecuación:*
$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)y_0' = 0 \qquad (*)$

De esta forma, aunque no conozcamos una expresión explícita de $y = f(x)$, podemos tener una idea aproximada de esta función sabiendo que tiene a
$y - y_0 = f\,'(x_0)(x - x_0)$
como recta tangente a $f(x)$ en el punto (x_0, y_0).
Si, además, derivando la ecuación $(*)$ hallamos que $y_0" \neq 0$, mejoramos nuestra información sobre dicha función, pues:

1. si $y_0" > 0 \Longrightarrow f$ es convexa cerca de $x_0 \Longrightarrow$ la gráfica de f queda por encima de la recta tangente cerca del punto (x_0, y_0).
2. si $y_0" < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava cerca de $x_0 \Longrightarrow$ la gráfica de f queda por debajo de la recta tangente cerca del punto (x_0, y_0).

3.2 Teoremas sobre funciones derivables. Aplicaciones de la derivada

3.2.1 Monotonía

Definición 3.2.1. Se dice que la función f es estrictamente creciente en un intervalo I cuando: para cualquier $x_1 < x_2$ puntos de I, $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición 3.2.2. Se dice que la función f es monótona creciente en un intervalo I cuando: para cualquier $x_1 < x_2$ puntos de I, $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Cuando digamos creciente, nos referiremos a estrictamente creciente.
Análogamente, podemos definir:

Definición 3.2.3. Se dice que la función f es estrictamente decreciente en un intervalo I cuando: para cualquier $x_1 < x_2$ puntos de I, $f(x_1) > f(x_2)$.

Definición 3.2.4. Se dice que la función f es monótona decreciente en un intervalo I cuando: para cualquier $x_1 < x_2$ puntos de I, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Cuando digamos decreciente, nos referiremos a estrictamente decreciente.

A partir de estas definiciones, podemos definir (análogamente para decreciente):

Definición 3.2.5. Se dice que la función f es creciente en un punto c cuando existe un intervalo $I = (c-\delta, c+\delta)$ de forma que, para cualquier $x_1 < x_2$ puntos de I, $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición 3.2.6. Se dice que la función f es creciente a la derecha de c cuando existe un intervalo $I = [c, c+\delta)$ de forma que, para cualquier $x_1 < x_2$ puntos de I, $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición 3.2.7. Se dice que la función f es creciente a la izquierda de c cuando existe un intervalo $I = (c-\delta, c]$ de forma que, para cualquier $x_1 < x_2$ puntos de I, $f(x_1) < f(x_2)$

Ejemplo 3.2.8.

1. $f(x) = x^3$ es creciente en todo $\mathbb{R}$, luego es creciente en $x = 0$.
2. $f(x) = x^2$ es creciente en $[0, \infty)$, luego es creciente en $x = 0^+$.
3. $f(x) = x^2$ es decreciente en $(-\infty, 0]$, luego es decreciente en $x = 0^-$.
4. Obviamente, $f(x) = x^2$ no es creciente ni decreciente en $x = 0$.

Teorema 3.2.9. *Si $f'(x)$ es continua en c y $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), entonces f es creciente (decreciente) en el punto c.*

Notar que el teorema es sólo una condición suficiente, no necesaria, porque $c = 0$ es un punto donde $f(x) = x^3$ crece, pero $f'(0) = 0$.

A continuación se estudia el crecimiento/decrecimiento (es decir, la monotonía) de funciones en intervalos.

Teorema 3.2.10. *Para que la función derivable f sea monótona creciente (decreciente) en un intervalo I, es necesario y suficiente que para todo $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).*

Teorema 3.2.11. *Si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente (decreciente) en el intervalo I.*

Ejemplo 3.2.12. Hallar los intervalos de monotonía de $f(x) = 3x - x^3$.

Solución: Derivando, tenemos $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$. Dado que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-1, 1)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1)$ y en $x \in (1, +\infty)$, deducimos que f es estrictamente creciente en $(-1, 1)$ (y también en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, obviamente) y es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$.

3.2.2 Extremos locales de funciones

La derivada es fundamental en la determinación de los valores máximos y mínimos de una función. En los resultados siguientes siempre supondremos que la función f está definida en un intervalo abierto $(c-\delta, c+\delta)$ alrededor de c.

Definición 3.2.13. La función f tiene un máximo (mínimo) local en el punto c si existe $\delta > 0$ tal que para todo punto $x \in (c-\delta, c+\delta)$

$$f(x) \leq f(c) \qquad (f(x) \geq f(c)).$$

Nos referiremos a un máximo o mínimo local de f como un extremo local de f.

Teorema 3.2.14. *Si c es un extremo local de f y f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad, supongamos que c es un mínimo local de f y que $f'(c)$ existe. por definición de mínimo local, tenemos que $f(c+h) \geq f(c)$ para todo h con $|h| < \delta$. Para $h > 0$ consideramos el cociente

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Es no negatico y su límite existe cuando $h \to 0$, tomando el valor $f'(c)$, dado que f es derivable en c por hipótesis. Por supuesto, el límite es también no negativo, luego $f'(c) \geq 0$. Sea ahora $h < 0$. El cociente anterior es no positivo y tomando límites cuando $h \to 0$, $f'(c) \leq 0$. Luego $f'(c) = 0$. □

Los puntos donde la función no es derivable o es derivable pero la derivada se anula son los únicos posibles extremos locales de f. Por este motivo se denominan *puntos críticos* de f. Los puntos críticos de f que no son extremos se denominan *puntos de silla* de f.

Ejemplo 3.2.15. Hallar los puntos críticos de $f(x) = 3x - x^3$ y de $g(x) = |x|$.

Solución: f is derivable en todo punto y su derivada es $f'(x) = 3(1-x^2)$. Luego, $f'(x) = 0$ si y sólo si if $x = 1$ or $x = -1$. Estos son los únicos puntos críticos de f. La función g es derivable en todo punto excepto en $c = 0$. La derivada es

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0; \\ -1, & \text{if } x < 0, \end{cases},$$

que nunca se anula. El único punto crítico de g es $c = 0$.

El siguiente resultado es importante porque completa la condición necesaria de ser punto crítico con una condición suficiente, de manera que el punto en cuestión es un extremos local.

Teorema 3.2.16. *Sea f continua en un intervalo $I = (c-\delta, c+\delta)$ centrado en c y derivable en todo I excepto posiblemente en el punto c.*

- *Si la derivada de f cambia su signo de positivo a negativo en el punto c, entonces c es un máximo local de f. Es decir, si $f'(x) > 0$ para $c-\delta < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < c+\delta$, se tiene que c es un máximo local de f.*

- *Si la derivada de f cambia su signo de negativo a positivo en el punto c, entonces c es un mínimo local de f. Es decir, si $f'(x) < 0$ para $c - \delta < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < c + \delta$, se tiene que c es un mínimo local de f.*
- *Si la derivada de f no cambia de signo en el punto c, entonces c no es extremo de f.*

Ejemplo 3.2.17. Hallar los extremos locales de $f(x) = 3x - x^3$ y de $g(x) = |x|$.

SOLUCIÓN: Sabemos del Ejemplo 3.2.12 que los únicos candidatos para f son los puntos 1 y -1. Dado que $f'(x) = 3 - 3x^2$, es fácil ver que $f'(x) < 0$ si $|x| > 1$ y que $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$. Por tanto, f' cambia de positivo a negativo al pasar por -1 y f tiene un máximo local en -1; de la misma forma, f' cambia de negativo a positivo al pasar por 1, luego f tiene un mínimo local en 1.

En cuanto a g, esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en el punto 0. La derivada para $x < 0$ es $g'(x) = -1 < 0$ y para $x > 0$ es $g'(x) = 1 > 0$, por lo que 0 es un mínimo local de g. En realidad, dado que este comportamiento es cierto en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y no sólo en un intervalo particular $(-\delta, \delta)$ alrededor de 0, el mínimo es global y no sólo local.

3.2.3 Teoremas de Rolle y de Lagrange

Teorema 3.2.18 (Teorema de Rolle)**.** *Sea una función f que satisface las condiciones:*

1. *f es continua en $[a, b]$;*
2. *f es derivable en (a, b);*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

El Teorema de Rolle establece que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto del plano $(c, f(c))$ que es paralela al eje OX.

Teorema 3.2.19 (Teorema de Lagrange)**.** *Sea una función f que satisface las condiciones:*

1. *f es continua en $[a, b]$;*
2. *f es derivable en (a, b);*

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

El Teorema de Lagrange es también conocido como el Teorema de los Valores Intermedios. El Teorema de Rolle es una consecuencia de éste, pues si $f(a) = f(b)$, entonces de la igualdad $0 = f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ se deduce que $f'(c) = 0$. Es interesante saber que el Teorema de Lagrange puede probarse también mediante el Teorema de Rolle! Aquí está una función auxiliar que facilita esta demostración. Sea

$$g(x) = (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x.$$

Notar que $g(a) = bf(a) - af(b) = g(b)$. Aplicando el Teorema de Rolle, tendremos que $g'(c) = 0$ para algún punto $c \in (a, b)$. Pero $g'(x) = (b - a)f'(x) - (f(b) - f(a))$, luego $0 = (f - a)f'(c) - (f(b) - f(a))$, es decir, $f(b) - f(a) = f'(c)(b.a)$.

El Teorema de Lagrange puede interpretarse como sigue: El cociente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es la pendiente de la recta r que pasa por los puntos de la gráfica de f $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$. El teorema nos dice que esta recta secante r es paraleta a alguna de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

3.3 Regla de L'Hopital

Esta regla es muy útil para resolver indeterminaciones en límites de la forma

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)},$$

cuando las dos funciones f y g son derivables.

Teorema 3.3.1 (Indeterminación 0/0)**.** *Suponemos que se satisfacen las siguientes hipótesis:*

1. *Las funciones f y g están definidas y son derivables en un intervalo $I = (c - \delta, c + \delta)$ centrado en c (excepto, quizá en el punto c);*
2. $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$*;*
3. *La derivada $g'(x) \neq 0$ para cualquier $x \in I$ (excepto, quizá en el punto c).*
4. *Existe el límite del cociente de las derivadas,* $\lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo 3.3.2. Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\tan bx}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: La indeterminación es del tipo 0/0 y todas las condiciones del Teorema 3.3.1 se cumplen. Por tanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\tan bx} = \lim_{x \to 0} \frac{a \cos ax}{\frac{b}{\cos^2 bx}} = \frac{a}{b}.$$

Teorema 3.3.3 (Indeterminación $\pm\infty/\infty$)**.** *Supongamos que (1), (3) y (4) del Teorema 3.3.1 se cumplen y que (2) es reemplazada por*

(2') $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$.

Entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo 3.3.4. Evaluar $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

SOLUCIÓN: La indeterminación es de la forma ∞/∞. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

Ejemplo 3.3.5. Calcular $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

SOLUCIÓN: La indeterminación es de la forma $0\cdot\infty$. Escribiendo $x\ln x$ como $\dfrac{\ln x}{1/x}$, se transforma en una del tipo ∞/∞. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Nota 3.3.6. La regla de L'Hôpital puede aplicarse también cuando $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$, con resultados totalmente análogos a los mostrados en los teoremas 3.3.1 y 3.3.3. En estos casos, tenemos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nota 3.3.7. Las formas indeterminadas $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 o ∞^0, pueden ser reducidas a las formas $0/0$ o ∞/∞.

Ejemplo 3.3.8. Calcular $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$.

SOLUCIÓN: La indeterminación es de la forma ∞^0. Notar que $x^{1/x}=e^{\ln x/x}$ y entonces

$$\lim_{x\to\infty}x^{1/x}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln x/x}=e^{\lim_{x\to\infty}\ln x/x}=e^0=1.$$

Ejemplo 3.3.9. Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

SOLUCIÓN: La indeterminación es de la forma $\infty-\infty$. Operando

$$\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x},$$

que es de la forma $0/0$ en $x=1$. Por la regla de L'Hôpital

$$\frac{\ln x}{1-x^{-1}+\ln x}$$

que de nuevo es del tipo $0/0$ en $x=1$. Una segunda aplicación de la regla de L'Hôpital da

$$\frac{x^{-1}}{x^{-2}+x^{-1}}=\frac{x}{1+x}$$

que tiene límite $1/2$ cuando $x\to 1$.

El siguiente ejemplo muestra que la aplicación de la regla de L'Hôpital puede llevar a resultados incorrectos si no se respetan las hipótesis de los teoremas anteriores.

Ejemplo 3.3.10. Es obvio que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$. Si en lugar de este enfoque directo intentamos aplicar la regla de L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{1} = +\infty,$$

que es obviamente incorrecto. El problema aquí es que el límite no es una indeterminación, por lo que la regla de L'Hôpital no puede aplicarse.

3.4 Optimización de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados $[a, b]$

Sea f una función continua definida en el intervalo $I = [a, b]$. Por el teorema de Weierstrass, f tiene en $[a, b]$ extremos globales (o absolutos). Por otra parte, dado que un extremo global es también local, si este extremo es interior y estén el intervalo abierto (a, b), entonces debe ser uno de los puntos críticos de f. Como consecuencia de esta reflexión, para hallar y clasificar los extremos de f en $[a, b]$, podemos usar el siguiente esquema.

1. Hallar los puntos críticos de f en (a, b);

2. Evaluar f en cada uno de los puntos críticos y en los extremos del intervalo, es decir, en a y en b;

3. Seleccionar aquellos puntos donde se alcanzan los valores mayores (máximos globales de f en $[a, b]$) y menores (míximos globales de f en $[a, b]$).

4. Estudiar el carácter del resto de puntos críticos y de a, b mediante el test de la derivada primera dado en el Teorema 3.2.16 (o mediante la segunda derivada que veremos más adelante). Para los extremos del intervalo, notar que si $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), entonces a es un mínimo (máximo) local de f en $[a, b]$, y si $f'(b) < 0$ ($f'(b) > 0$), entonces b es un mínimo (máximo) local de f en $[a, b]$.

Ejemplo 3.4.1. Hallar y clasificar los extremos de la función $f(x) = 3x - x^3$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución: f es continua y $I = [-2, 2]$ es cerrado y acotado. El Teorema de Weierstrass asegura que f alcanza en I extremos globales. Éstos se hallan entre los puntos críticos de f en $(-2, 2)$. Del Ejemplo 3.2.17 sabemos que de hecho $-1 \in I$ es un minimizador local y que $1 \in I$ es un maximizador local de f. Además $f(-1) = -2$ y $f(1) = 2$. Por otra parte, $f(-2) = 2$ y $f(2) = -2$. En consecuencia, -1 y 2 son minimizadores globales de f en I y -2, 1 son maximizadores globales de f en I.