Tema 2

Límites y continuidad de funciones de una variable

2.1 Límite de una función

Para determinar el comportamiento de una función f cuando x se aproxima a un valor finito c, usamos el concepto de límite. Decimos que el límite de f es L, y escribimos $\lim_{x\to c} f(x) = L$, si los valores de f se aproximan a L cuando x se acerca a c.

Definición 2.1.1. (Límite cuando x tiende a un valor finito c). Decimos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un número positivo δ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

Podemos dividir la definición anterior en dos partes, usando límites laterales.

Definición 2.1.2.

1. Decimos que L es el límite de f cuando x tiende a c por la derecha, $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$, si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un número positivo δ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

   siempre que $0 < x - c < \delta$.

2. Decimos que L es el límite de f cuando x tiende a c por la izquierda, $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$, si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un número positivo δ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

   siempre que $0 < c - x < \delta$.

Teorema 2.1.3. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *si y solo si*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L.$$

También cabe preguntarse por el comportamiento de la función de f cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Definición 2.1.4. (Límites cuando x tiende a $\pm\infty$)

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un valor positivo de x, llamado x_1, tal que
$$|f(x) - L| < \epsilon$$
siempre que $x > x_1$.
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si para cualquier número positivo pequeño ϵ, existe un valor negativo de x, llamado x_1, tal que
$$|f(x) - L| < \epsilon$$
siempre que $x < x_1$.

Si los valores absolutos de una función se hacen arbitrariamente grandes cuando x tiende, ya sea, a un valor finito c o a $\pm\infty$, entonces la función no tiene límite finito L pero se aproximará a $-\infty$ o $+\infty$. Es posible dar una definición formal. Por ejemplo, diremos que $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ si para cualquier número positivo grande M, existe un positivo δ tal que
$$f(x) > M$$
siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Por favor, complete el resto de los casos.

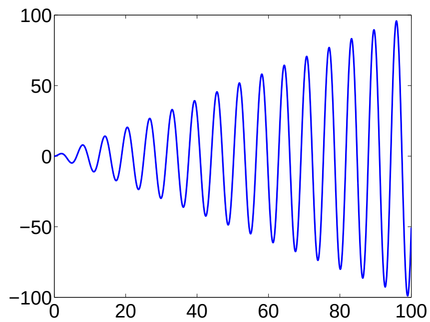
Nota 2.1.5. Observar que aún cuando $f(c)$ estuviera bien definido, podría ser que $\lim_{x\to c} f(x)$ no existiese o que $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$. Por ejemplo, la función f que es igual a 1 para $x \neq 0$ pero $f(0) = 0$. Claramente el límite de f en 0 es $1 \neq f(0)$.

Ejemplo 2.1.6. Consideremos los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 6} x^2 - 2x + 7 = 31$.
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 - 2x + 7 = \infty$, puesto que el primer término del polinomio toma valores arbitrariamente grandes.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - x^2 = \infty$, puesto que el primer término del polinomio toma valores arbitrariamente grandes para valores grandes de x, en cambio, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - x^2 = -\infty$ ya que que el primer término del polinomio toma valores arbitrariamente grandes en valor absoluto, y negativos.
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, ya que para x arbitrariamente grande en valor absoluto , $1/x$ es arbitrariamente pequeño.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe. En realidad, los límites laterales son:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

El límite por la derecha es infinito puesto que $1/x$ se hace arbitrariamente grande cuando x es pequeño y positivo. El límite por la izquierda es menos infinito puesto que $1/x$ se hace arbitrariamente grande en valor absoluto y negativo, cuando x es pequeño y negativo.

6. $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} x$ no existe. Como x tiende a infinito, $\operatorname{sen} x$ oscila entre 1 y -1. Esto significa que $x \operatorname{sen} x$ cambia de signo un número infinito de veces cuando x tiende a infinito, tomando valores arbitrariamente grandes en valor absoluto. La gráfica se muestra a continuación.



7. Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0; \\ -x^2, & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

   $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, pero $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe puesto que los límites laterales son diferentes.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2 = -1.$$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe, ya que los límites laterales son diferentes.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \text{(cuando } x \text{ es negativo, } |x| = -x\text{)}.$$

En las siguientes propiedades, $\lim f(x)$ se refiere al límite cuando x tiende a $+\infty$, $-\infty$ o a un número real fijo c, pero no mezclaremos distintos tipos de límites.

2.1.1 Propiedades de los límites

Dadas las funciones f y g supondremos que todos los límites siguientes existen; $\lambda \in \mathbb{R}$ denota un escalar arbitrario.

1. *Producto por un escalar:* $\lim \lambda f(x) = \lambda \lim f(x)$.

2. *Suma:* $\lim(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$.

3. *Producto:* $\lim f(x)g(x) = (\lim f(x))(\lim g(x))$.

4. *Cociente:* Si $\lim g(x) \neq 0$, entonces $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

Teorema 2.1.7 (Teorema del encaje)**.** *Supongamos que las funciones f, g y h están definidas en un entorno del punto c, excepto posiblemente, en c, y que satisfacen las desigualdades*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Sea $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. *Entonces*

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Ejemplo 2.1.8. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Solución: Usaremos el teorema anterior con $g(x) = -|x|$ y $h(x) = |x|$. Notemos que para todo $x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1$ así, cuando $x > 0$

$$-x \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq x,$$

y cuando $x < 0$

$$x \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq -x.$$

Estas desigualdades son equivalentes a $-|x| \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|$. Y puesto que

$$\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

podemos usar el teorema anterior para concluir que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

2.1.2 Técnicas para evaluar $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$

1. Usamos la propiedad del cociente de límtes, si es posible.

2. Si $\lim f(x) = 0$ y $\lim g(x) = 0$, probamos lo siguiente:

   (a) Factorizamos $f(x)$ y $g(x)$ y reducimos $\frac{f(x)}{g(x)}$ a sus términos más simples.

   (b) Si $f(x)$ o $g(x)$ implica una raíz cuadrada, entonces multiplicamos ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ por el conjugado de la raíz cuadrada.

   Ejemplo 2.1.9.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to 3}(x-3) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x}\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(1+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1+\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2}.$$

3. Si $f(x) \neq 0$ y $\lim g(x) = 0$, entonces $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe o equivalentemente $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ o $-\infty$.

4. Si x tiende a $+\infty$ o $-\infty$, dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x en cualquiera de los términos del denominador.

   Ejemplo 2.1.10.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x}{-x^4 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}{-1 + \frac{2}{x^4}} = \frac{0-0}{-1+0} = 0.$$

2.1.3 Límites exponenciales

Consideramos

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{g(x)}.$$

Este límite es una indeterminación en los siguientes casos:

- $\lim_{x\to c} f(x) = 1$ and $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ (1^∞).
- $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ and $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ (0^0).
- $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ and $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ (∞^0).

Observando que

$$\lim_{x\to c} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to c} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to c} g(x)\ln f(x)},$$

todos los casos anteriores se reducen a la indeterminación $0 \cdot \infty$, puesto que tenemos que calcular el límite

$$\lim_{x\to c} g(x) \ln f(x).$$

En el primer tipo de indeterminanción, 1^∞, suele ser muy útil utilizar la siguiente propiedad

$$\lim_{x\to c} g(x) \ln f(x) = \lim_{x\to c} g(x)(f(x) - 1).$$

pues si x está próximo a 0, $\ln(1+x) \approx x$, o bien, $\ln x \approx x - 1$ cuando x es próximo a 1.

Ejemplo 2.1.11. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{x\frac{1}{x}} = e.$

Ejemplo 2.1.12. Sean $a, b > 0$. Calcular $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+ax}{2+bx}\right)^x$.

Si $a > b$, entonces la base tiende a $a/b > 1$, por lo que el límite es ∞. Si $a < b$, entonces la base tiende a $a/b < 1$, por lo que el límite es 0. Cuando $a = b$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+ax}{2+ax}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1+ax}{2+ax} - 1\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{2+ax}} = e^{-1/a}.$$

2.1.4 Un límite importante

Recordar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplo 2.1.13. Encontrar los siguientes límites:

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \overset{(z=3x)}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{\frac{z}{3}} = 3 \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 3.$

2.2 Asíntotas

Una *asíntota* es una recta tal que la gráfica de la función se acerca arbitrariamente a ella hasta que la distancia entre la curva y la recta casi se desvanece.

Definición 2.2.1. Sea f una función

1. La recta $x = c$ es una asíntota vertical de f si $\lim_{x\to c^+} |f(x)| = \infty$ o $\lim_{x\to c^-} |f(x)| = \infty$.

2. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de f si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ o $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$.

3. La recta $y = ax + b$ es una asíntota oblícua de f si

   (a) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} (f(x) - ax) = b$, o

   (b) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} (f(x) - ax) = b$.

Notemos que una asíntota horizontal es un caso particular de una asíntota oblícua con $a = 0$.

Ejemplo 2.2.2. Determinar las asíntotas de $f(x) = \dfrac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$.

Solución: Cuando $x = 1$, el denominador es 0 y el numerador es distinto de 0. El dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$. Vamos a chequear que $x = 1$ es una asíntota vertical de f:

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{(1+x)^4}{(1-x)^4} = +\infty$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(1+x)^4}{(1-x)^4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(1/x+1)^4}{(1/x-1)^4} = 1,$$

por lo tanto $y = 1$ es una asíntota horizontal en $+\infty$. De la misma manera, $y = 1$ es una asíntota horizontal en $-\infty$. No hay otras asíntotas oblícuas (la gráfica de f puede tener a lo sumo dos asíntotas oblícuas, una por la izquierda y otra por la derecha).

Ejemplo 2.2.3. Determinar las asíntotas de $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2}{x^2}$.

SOLUCIÓN: El dominio de f es $\mathbb{R} - \{0\}$. Vamos a chequear que $x = 0$ es una asíntota vertical de f.

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{3x^3 - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0^\pm} (3x - \frac{2}{x^2}) = \lim_{x\to 0^\pm} 3x - \lim_{x\to 0^\pm} \frac{2}{x^2} = -\infty.$$

Así, $x = 0$ es una asíntota vertical de f. Por otro lado

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x^3 - 2}{x^2} = \lim_{x\to \pm\infty} (3x - \frac{2}{x^2}) = \pm\infty$$

por lo que la gráfica de f no tiene asíntota horizontal. Vamos a estudiar ahora las asíntotas oblícuas:

$$a = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x^3 - 2}{x^3} = \lim_{x\to \pm\infty} \left(3 - \frac{2}{x^3}\right) = 3,$$

$$b = \lim_{x\to \pm\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{3x^3 - 2}{x^2} - 3x\right) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = 0.$$

Concluímos que $y = 3x$ es una asíntota oblícua tanto en $+\infty$ como $-\infty$.

2.3 Continuidad

Los límites más sencillos de evaluar son aquellos donde intervienen funciones continuas. Intuitivamente, una función es continua si podemos dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel.

Definición 2.3.1. Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en c si $c \in D(f)$ y

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Por consiguiente, f es *discontinua en* c si bien $f(c)$ no está definida o bien si $\lim_{x\to c} f(x)$ no existe o $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$. De la misma forma podemos definir la continuidad lateral de f en c,

Definición 2.3.2. Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *continua por la derecha* en c, si $c \in D(f)$ y

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c).$$

y f es *continua por la izquierda* en c, si $c \in D(f)$ y

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c).$$

Obviamente, una función f es continua en c si lo es por la derecha y por la izquierda a la vez.

2.3.1 Propiedades de las funciones continuas

Sean f y g ambas funciones continuas en c. Entonces las siguientes funciones son también continuas en c.

1. *Suma.* $f + g$.
2. *Producto por un escalar.* λf, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. *Producto.* fg.
4. *Cociente.* f/g, siempre que $g(c) \neq 0$.

2.3.2 Límite y continuidad de una función compuesta

Teorema 2.3.3. *Sean f, g funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Si g es continua en L y $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces*

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x)) = g(L).$$

Si la función f es continua en c, entonces, llamando $L = f(c)$ el resultado anterior se convierte en:

Corolario 2.3.4. *Sea f una función continua en c y g continua en $f(c)$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es también continua en c.*

Ejemplo 2.3.5. Evaluar los siguientes límites:

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1.$

  Notar que la función $\ln(\cdot)$ es continua en e, por lo que podemos aplicar 2.3.4.

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\frac{\ln(1+z)}{\ln a}} = \ln a \left(\lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(1+z)}\right) = \ln a.$

  En lo anterior hemos cambiado la variable $z = a^x - 1$, de manera que $x = \ln(1+z)/\ln a$, and hemos utilizado el valor del límite calculado previamente.

2.3.3 Continuidad de funciones elementales

Se dice que una función es *elemental* si esta puede ser obtenida por medio de un número finito de operaciones aritméticas elementales y superposiciones de funciones elementales básicas. Las funciones $y = C =$ constante, $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = e^x$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \arctan x$ son ejemplos de funciones elementales. *Las funciones elementales son funciones continuas en sus dominios.*

Ejemplo 2.3.6.

1. La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es la composición de las funciones $y = 4 - x^2$ y $f(y) = y^{1/2}$, que a su vez son funciones elementales, por lo que f es continua en su dominio, esto es, en $D = [-2, +2]$.
2. La función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ es la composición de la función anterior f y la función $g(y) = 1/y$, por lo que ella es elemental y continua en su dominio, $D(g) = (-2, +2)$.

2.3.4 Continuidad de la función inversa

Una función uno a uno (también llamada biyectiva) no tiene por qué ser continua. Por ejemplo, la función siguiente
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0; \\ x, & \text{si } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$
es biyectiva considerando que su dominio e imagen es el intervalo $[0, 1]$.

Puede comprobarse que $f(x)$ no es continua, y su inversa, $f^{-1}(x)$, que es ella misma, tampoco es continua.

Sin embargo, eso no puede suceder si la función $f(x)$ fuera continua, como prueba el siguiente teorema:

Teorema 2.3.7. *Sea $f : I \longrightarrow J$ continua y biyectiva. Entonces:*

a) f es estrictamente creciente (o decreciente), y

b) su inversa f^{-1} es también una función continua.

Observación: Obviamente, f^{-1} es también estrictamente creciente (o decreciente), según lo sea f.

Ejemplo 2.3.8. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 1} \arctan\left(\dfrac{x^2 + x - 2}{3x^2 - 3x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Solución: La función *arctan* $= \tan^{-1}$ es continua como acabamos de ver. Luego, aplicando el teorema 2.3.3:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \arctan\left(\frac{x^2 + x - 2}{3x^2 - 3x}\right) &= \arctan\left(\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 - 3x}\right) \\
&= \arctan\left(\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{3x(x-1)}\right) \\
&= \arctan\left(\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{3x}\right) \\
&= \arctan 1 \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2.3.5 Teoremas de continuidad

Las funciones continuas poseen propiedades interesantes. Diremos que una función es continua en el intervalo *cerrado* $[a, b]$ si es continua en todo punto $x \in (a, b)$ y además es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

Teorema 2.3.9 (Teorema de Bolzano)**.** *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Ejemplo 2.3.10. Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ admite una solución, y encontrar la solución con un error menor a 0.1.

Solución: Si $f(x) = x^3 + x - 1$, el problema es mostrar que existe un c tal que $f(c) = 0$. Queremos aplicar el teorema de Bolzano. Primero, f es continua en $\mathbb{R}$. Luego, podemos identificar un intervalo adecuado $I = [a, b]$. Note que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$ así, existe una solución $c \in (0, 1)$.

Ahora, para hallar una valor aproximado de c, usamos un método de *bisección* de la siguiente manera: consideramos el intervalo $[0.5, 1]$; $f(0.5) = 1/8+1/2-1 < 0$ y $f(1) > 0$, así $c \in (0.5, 1)$. Escogemos ahora el intervalo $[0.5, 0.75]$; $f(0.5) < 0$ y $f(0.75) = 27/64+3/4-1 > 0$ así, $c \in (0.5, 0.75)$. Sea ahora el intervalo $[0.625, 0.75]$; $f(0.625) \approx -0.13$ y $f(0.74) > 0$ así, $c \in (0.625, 0.75)$. La solución es aproximadamente $c = 0.6875$ con un error máximo de 0.0625.

El teorema anterior, conocido como de Bolzano (o de los ceros) puede generalizarse a todos aquellos valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$, como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.11 (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea f continua en $[a, b]$. Para cada valor intermedio k entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $x_k \in [a, b]$ tal que $f(x_k) = k$.*

Nota 2.3.12. Por valor intermedio queremos decir que $f(a) < k < f(b)$ o bien $f(b) < k < f(a)$.

Demostración: basta con considerar la función $g(x) = f(x) - k$. Entonces,
$g(a) < 0 < g(b)$ o bien $g(b) < 0 < g(a)$.
Aplicando el teorema de Bolzano a la función g, existe $x_k \in [a, b]$ tal que $g(x_k) = 0$, o lo que es lo mismo, existe $x_k \in [a, b]$ tal que $f(x_k) = k$.

El siguiente resultado es muy útil cuando se quiere calcular la imagen de una función continua.

Corolario 2.3.13. *Sea f una función continua, no constante y definida sobre un intervalo I (no necesariamente cerrado ni acotado). Entonces, $J = Im(f)$ es un intervalo.*

Observación: es importante notar que, si I posee cierta propiedad, no tiene por qué tenerla J.

Ejemplo 2.3.14. $f(x) = 1/x$ es continua sobre $I = (0, 1]$ acotado, pero $J = Im(f) = [1, \infty)$ no es acotado.

Ejemplo 2.3.15. $f(x) = 1/x$ es continua sobre $I = [1, \infty)$ cerrado, pero $J = Im(f) = (0, 1]$ no es cerrado.

Sin embargo, si el intervalo I es compacto, es decir, cerrado y acotado, entonces su imagen J también lo es.

Ese resultado, conocido como teorema de Weierstrass, es el más importante del Tema 2.

Teorema 2.3.16 (Teorema de Weierstrass)**.** *Si f es continua en $[a, b]$, entonces existen puntos $c, d \in [a, b]$ tal que*

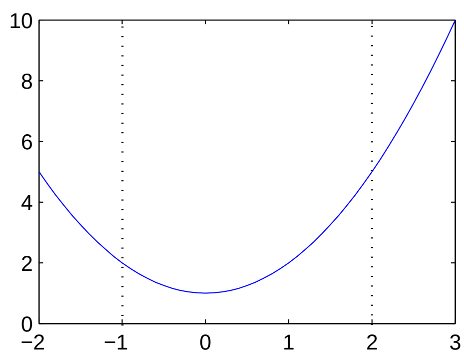
$$f(c) \le f(x) \le f(d)$$

para todo $x \in [a, b]$.

El teorema afirma que una función continua en un intervalo cerrado alcanza un valor mínimo ($m = f(c)$) y un valor máximo ($M = f(d)$). El punto c es llamado *mínimo global* de f en $[a, b]$ y d es llamado *máximo global* de f en $[a, b]$.

Ejemplo 2.3.17. Demostrar que la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo cerrado $[-1, 2]$ alcanza máximo y mínimo global en dicho intervalo.

SOLUCIÓN: La gráfica de f se muestra a continuación.



Podemos apreciar que f es continua en $[-1, 2]$, en realidad, es continua en todo $\mathbb{R}$, y f alcanza su valor máximo en $x = 2$, $f(2) = 5$ y su valor mínimo en $x = 0$, $f(0) = 1$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Ejemplo 2.3.18. Las hipótesis en el Teorema de Weierstrass son esenciales.

- Intervalo no cerrado o no acotado.
  - Sean $I = (0, 1]$ y $f(x) = 1/x$; f es continua en I, pero no tiene máximo global.
  - Sean $I = [0, \infty)$ y $f(x) = 1/(1 + x)$; f es continua en I, pero no tiene mínimo global, dado que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pero $f(x) > 0$ es estrictamente positiva para todo $x \in I$.
- La función no es continua. Sean $I = [0, 1]$ y $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$; f tiene un mínimo global en $x = 0$, pero no hay máximo global, dado que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ pero $f(x) < 1$ para todo $x \in I$.

2.3.6 Puntos fijos

Definición 2.3.19. Sea $f : I \to J$. Decimos que el punto $x^* \in I$ es un punto fijo de f cuando $f(x^*) = x^*$.

Graficamente, x^* es un punto fijo cuando la gráfica de $f(x)$ interseca la diagonal principal $y = x$.

Nota 2.3.20. Si consideramos la función $g(x) = f(x) - x$ entonces es obvio que los puntos fijos de $f(x)$ corresponden con los ceros de $g(x)$.

Ejemplo 2.3.21. Consideremos la función $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$. Entonces, obviamente, los puntos fijos son 0 y 1.

Ejemplo 2.3.22. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $[a, b] \subset \mathrm{Im}(f)$. Entonces, f tiene al menos un punto fijo.

Obsérvese que existen puntos x_a y x_b tales que $f(x_a) = a$ y $f(x_b) = b$.

Si consideramos el intervalo limitado por los puntos x_a y x_b, observamos que $g(x) = f(x) - x$ satisface que $g(x_a) \leq 0, g(x_b) \geq 0$, así que $g(x)$ tiene un cero y, por tanto, $f(x)$ tiene un punto fijo.

Nota 2.3.23. es importante observar que, aunque una función monótona definida en un intervalol I tiene una única raíz, o ninguna, este resultado para puntos fijos sigue siendo verdad solo para funciones decrecientes, pero no para funciones crecientes. Basta considerar el ejemplo 1.

2.3.7 Equilibrio de un mercado

Sabemos que si f y g están definidas en un intervalo $[a, b]$, ambas funciones son continuas, la primera es creciente y la segunda decreciente, y $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$, entonces existe un único punto x_0 tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

Para probar esa igualdad, solo tienes que observar que la función $g(x) - f(x)$ (o $f(x) - g(x)$) tiene un cero.

Si consideramos x la cantidad de una cierta mercancía, y $f(x), g(x)$, respectivamente, el precio al cual esa cantidad es ofrecida y demandada, llamamos:

1. x_0 la cantidad de equilibrio de ese mercado,
2. $f(x_0) = p_0 = g(x_0)$ el precio de equilibrio; y
3. el par (x_0, p_0) el equilibrio de ese mercado.

La situación es un poco más complicada si consideramos el intervalo $[0, \infty)$ en vez del intervalo $[a, b]$. En este caso, es razonable asumir para la función de oferta que $f(0) = 0$, es decir, que a un precio 0, la oferta es nula y que, si $x \to \infty$, entonces $f(x) \to \infty$, cuanto las restricciones a la producción provocan que el precio crezca y crezca.

Para la función de demanda, es también razonable asumir que, si $x \to \infty$, entonces $g(x) \to 0$, ya que el mercado se saturará con una producción tan grande.

Con respecto a la demanda cerca de 0, tenemos dos posibilidades:

i) $\lim_{x \to 0+} g(x)$ es finito; o

ii) $\lim_{x \to 0+} g(x) = \infty$.

En el caso i), si consideramos el intervalo $[a, b] = [0, M]$, donde M cumple que $f(M) > g(M)$, es claro que tenemos un equilibrio para ese mercado.

El caso ii) es un poco más complicado. En esa situación, consideramos el intervalo $[a, b] = [m, M]$, donde $m > 0$ satisface que $f(m) < g(m)$ y M satisface, de nuevo, que $f(M) > g(M)$; entonces, es claro una vez más que hay equilibrio para ese mercado. En ambos casos el equilibrio es único.