INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

1. Las funciones trigonométricas son aquellas que relacionan la amplitud de los ángulos con un cociente de longitudes. Concretamente, en el caso de angulos menores de 90 grados, se trata del cociente de longitudes de los lados de un triangulo rectángulo, para las funciones que vamos a considerar: seno, coseno y tangente.

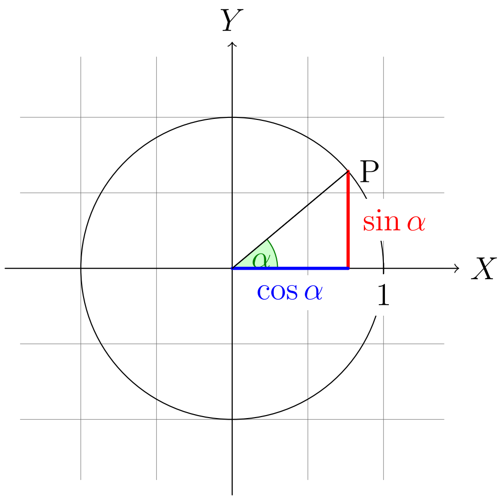
   También vamos a estudiar dos funciones inversas que nos serán de interés:arco-seno y arco-tangente.

2. ¿Cómo medimos los ángulos? Generalmente, medimos un giro completo como 360 grados (o un cuarto de giro como 90 grados). Pero como nos interesa que las derivadas de estas funciones sean fáciles de manejar, medimos los ángulos en radianes.

   ¿Qué es un radián? Es aquel ángulo cuyo arco mide lo mismo que cualquiera de los segmentos que lo limita. Si consideramos la circunferencia de radio unidad,como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, al ser el radio 1, la circunferencia medirá $2\pi$, o lo que es lo mismo, 360 grados equivalen a $2\pi$ radianes, 90 grados equivalen a $\pi/2$ radianes o, análogamente, 1 radián equivale a poco más de 57 grados.

3. Si consideramos un ángulo menor de 90 grados, podemos considerar dicho ángulo $\alpha$ limitado por el eje horizontal, un segmento de pendiente positiva que pasa por el origen y la circunferencia de radio unidad centrada en el origen.

   Pues bien, si consideramos el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa, o lado mayor, el segmento antes citado y como catetos, o lados menores, los segmentos vertical y horizontal originados por la proyección del punto de corte $P$ de la hipotenusa con la circunferencia unidad sobre el eje horizontal (ver dibujo 1).




Dibujo 1: ángulo en el primer cuadrante

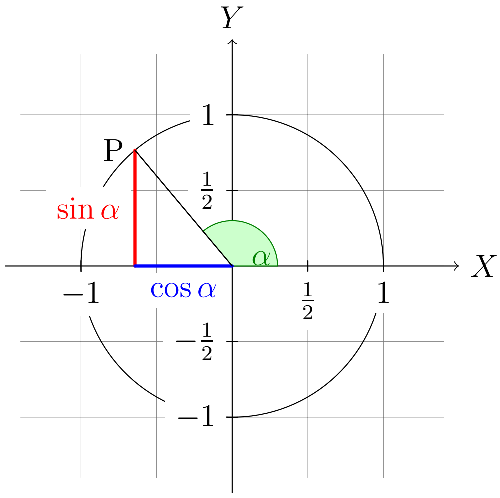
   definimos:

   (a) el seno de dicho ángulo es la longitud del cateto vertical.
   (b) el coseno de dicho ángulo es la longitud del cateto horizontal.
   (c) la tangente es el cociente entre el seno y el coseno o, lo que es lo mismo, entre las longitudes del cateto vertical, partida por la longitud del cateto horizontal.

   De esta forma obtenemos los siguientes valores (para los ángulos, la primera cifra es en grados sexagesimales y la segunda en radianes):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $grados - radianes$ | $0-0$ | $30-\pi/6$ | $45-\pi/4$ | $60-\pi/3$ | $90-\pi/2$ |
| seno | $\sqrt{0}/2=0$ | $\sqrt{1}/2=1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{4}/2=1$ |
| coseno | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| tangente | 0 | $1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | no definido |

4. Si consideramos un ángulo $\alpha$ entre 90 y 180 grados, lo mejor es olvidarnos ahora del triángulo rectángulo y lo que ahora tenemos son las siguientes longitudes, determinadas por el segmento que pasa por el origen y que corta a la circunferencia unidad en un punto $P$ del segundo cuadrante (ver dibujo 2):




Dibujo 2: ángulo en el segundo cuadrante

(a) si descendemos perpendicularmente desde el punto $P$ hasta el eje horizontal, el seno del ángulo $\alpha$ es igual a la longitud de dicho segmento vertical.

Observamos que la función seno solo toma valores positivos o 0.

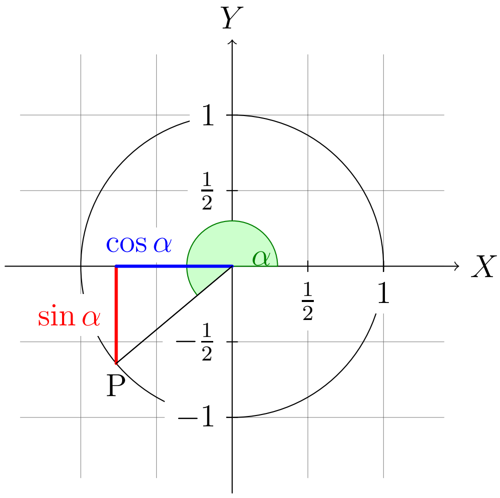
(b) el coseno de dicho ángulo es igual a menos la longitud del segmento determinado por la proyección del punto $P$ sobre el eje horizontal y el origen de coordenadas. Observamos que la función coseno solo toma valores negativos o 0.

(c) la tangente de dicho ángulo es, una vez más, el cociente entre el seno y el coseno. Observamos que la función tangente solo toma valores negativos o 0. De esta forma, los valores de las funciones trigonómetricas serían los siguientes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $grados - radianes$ | $90-\pi/2$ | $120-2\pi/3$ | $135-3\pi/4$ | $150-5\pi/6$ | $180-\pi$ |
| $seno$ | $\sqrt{4}/2=1$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{1}/2=1/2$ | $\sqrt{0}/2=0$ |
| coseno | 0 | $-\sqrt{1}/2=-1/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{4}/2=-1$ |
| tangente | no definido | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3/3}$ | 0 |

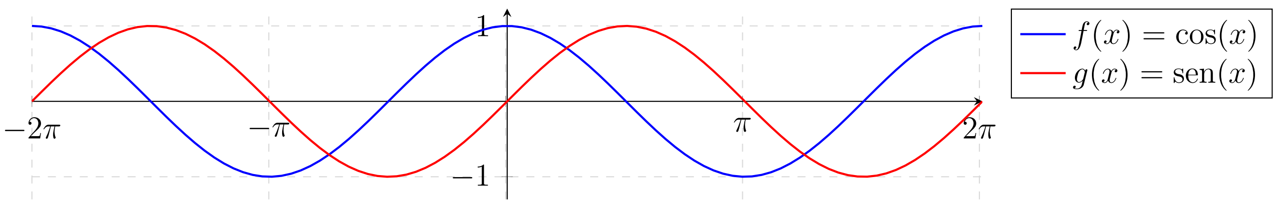
5. Si consideramos un ángulo $\alpha$ entre 0 y $-180$ grados, es decir, girando el eje horizontal hacia abajo, al cuarto y tercer cuadrantes, lo mejor es observar que obtenemos unos resultados muy similares a los de los epígrafes 3) y 4), observando lo siguiente:

seno$(-\alpha) = -$seno$(\alpha)$, coseno$(-\alpha) =$coseno$(\alpha)$, tangente $(-\alpha) = -$tangente $(\alpha)$ (ver dibujo 3)



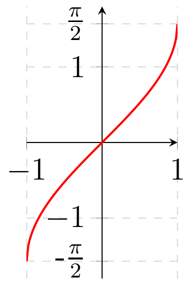

Dibujo 3: ángulo en el tercer cuadrante

6. Para definir las funciones anteriores para cualquier otro ángulo, basta tener en cuenta que tanto el seno como el coseno son funciones periódicas de período $2\pi$ (ver dibujo 4) y que la tangente es periódica de período $\pi$.



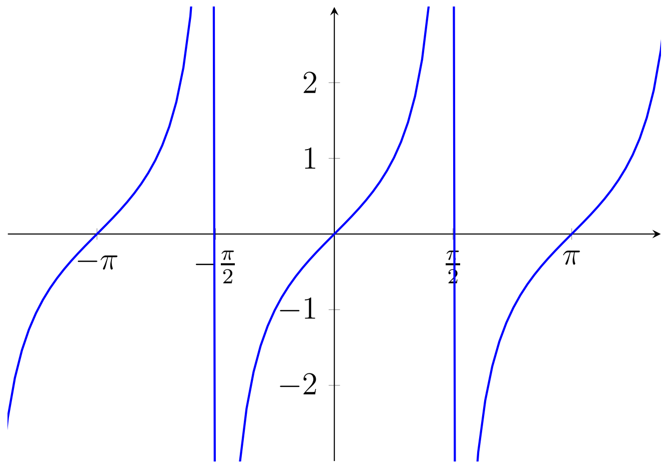

Dibujo 4: funciones seno y coseno

7. (a) Si consideramos la función seno definida desde el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ hasta el intervalo $[-1, 1]$, observamos que dicha función es biyectiva, luego tiene inversa. Pues bien, su función inversa definida de $[-1, 1]$ a $[-\pi/2, \pi/2]$ se llama arco-seno. Ver dibujo 5.



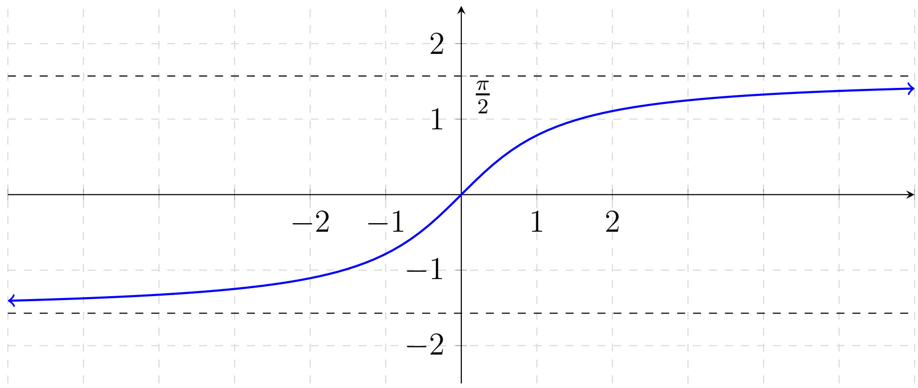

Dibujo 5: función arcoseno

   (b) Si consideramos la función tangente definida desde el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ hasta el intervalo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, observamos que dicha función es biyectiva (ver dibujo 6), luego tiene inversa.




Dibujo 6: función tangente con sus asíntotas

Pues bien, su función inversa definida de $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ a $(-\pi/2, \pi/2)$, se llama arcotangente. Ver dibujo 7.




Dibujo 7: función arcotangente y sus asíntotas

8. Hay muchas identidades trigonométricas interesantes, pero nosotros nos centraremos en dos:

   (a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$; dividiendo la igualdad anterior por $\cos^2(x)$, obtenemos que:

   (b) $\tan^2(x) + 1 = (1/\cos x)^2$
   Las siguientes identidades, que relacionan el seno y el coseno de un ángulo de doble amplitud pueden ser útiles, aunque no las usaremos apenas:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$