HOJA 1: Introducción

1. Para cada una de las desigualdades que siguen, determinar el conjunto de números reales que las satisfacen. Dibujar dicho conjunto.

a)(*) $|9-2x|< 1$ b)(*)$-5|x+3|< 4x-5$ c)(*)$\frac{|x|}{3}+2 < |x|$ d)(*) $1 < |3-2x|$

e)(*) $\frac{(x^2-16)(x-1)}{x-3} \geq 0$ f) $|x-3|+|x+3|< 10$ g) $|x-3|+|x+3|< \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ h)$|\frac{x-1}{x}|-1 \geq 0$

2. (*)Interpreta geométricamente las desigualdades a), b), c) y d) mediante las funciones

a) $y = |9-2x|$; $y = 1$ b) $y = -5|x+3|$; $y = 4x-5$

c) $y = \frac{|x|}{3}+2$; $y = |x|$ d) $y = 1$; $y = |3-2x|$

3. Discutir si se cumplen las desigualdades siguientes :

a) (*)$|x+y| \leq |x|+|y|$ b)(*)$|x|+|y| \leq |x+y|$ g)(*) $|x-y| \leq |x|+|y|$

c)(*) $|x-y| \leq |x|-|y|$ d)(*) $|x|-|y| \leq |x-y|$ h)(*) $|x|+|y| \leq |x-y|$

e)(*) $||x|-|y|| \leq |x|+|y|$ f) $|x|+|y| \leq ||x|-|y||$ i) $||x|-|y|| \leq |x|-|y|$

4. Discutir la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ b) $|x|< |y| \Rightarrow x^2 < y^2$

c) $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$ d) $x^2 < y^2 \Rightarrow |x|< |y|$

5. Obtener para los conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ que se definen a continuación, el máximo y el mínimo, si los hubiera, para $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$

a) $A = \{x : senx = \alpha\}$ b) $A = \{x : \cos x = \alpha\}$ c) $A = \{x : e^x \leq \alpha\}$

d) $A = \{x : e^x \geq \alpha\}$ e) $A = \{x : \ln x \leq \alpha\}$ f) $A = \{x : \ln x \geq \alpha\}$

6. (*)En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la siguiente relación: $(a,b) \leq (c,d)$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$. Comprobar que ”$\leq$” es una relación de orden parcial. Sean $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|\leq 1;\ |y|\leq 1\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4-x^2\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-9 \leq y \leq 0\}$ y $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|\leq y \leq 6-x^2\}$.
Obtener para los conjuntos anteriores, si los hubiera, el máximo y el mínimo, los maximales y los minimales.

7. (*)Sean $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x^2-1$.

a) Hallar el dominio y la imagen de estas funciones.

b) Hallar $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

c) Hallar $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

8. (*)Hallar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a)$f(x) = ln(senx)$ b)$g(x) = ln(sen^2x)$

c) $h(x) = ln\sqrt{-x^2+4x-3}$

9. Repasar las gráficas de las funciones:

a)(*) $f(x) = x^2$ b)(*)$f(x) = e^x$ c)(*)$f(x) = lnx$ d) $f(x) = senx$

En cada caso dibujar las gráficas de las funciones siguientes a partir de las anteriores, interpretando geométricamente los resultados.

i)$g(x) = f(x+1)$ ii)$h(x) = -2f(x)$ iii)$p(x) = f(3x)$

iv)$s(x) = f(x)+1$ v)$r(x) = |f(x)|$ vi)$m(x) = f(|x|)$

10. (*)Sean $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ funciones crecientes. Discutir la verdad o falsedad de las siguiente afirmaciones

a) $f+g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente
b) $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente
c) $f-g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente si ambas funciones son positivas
d) $f-g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente si ambas funciones son negativas

11. Sean $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones monótonas. Discutir cuando será $g \circ f$ creciente o decreciente dependiendo del comportamiento de f y g (en total cuatro casos).

12. Para cada una de las siguientes funciones, por ejemplo f, hallar los intervalos I, J para que $f : I \to J$ sea biyectiva.

$a)\ f(x) = x^2; b)\ g(x) = \ln|x|\ ; c)\ h(x) = sen(x);\ d)\ i(x) = e^{-x^2}$.

13. (*)Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

$f(x) = (x^3-5)^5,\quad g(x) = (\sqrt[3]{x-5}\,)^5$

$h(x) = \ln(\frac{x-1}{x-2}); i(x) = \frac{3x-1}{x-3};\ j(x) = \begin{cases} x+3 & -3 \le x \le 0 \\ -2x & 0 < x \le 3 \end{cases}$

14. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos:

a) $f(x) = cos5x$ b)$g(x) = sen2x$ c)$h(x) = cos5xsen2x$ d)$k(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

e)$l(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$ f)$m(x) = \frac{x^3}{x^5+1}$ g) $n(x) = \frac{arctgx}{x}$

15. Sea f una función par y g una función impar. Demuestra que:

$|g|$ es par; $f \circ g$ es par; $g \circ f$ es par;

$f \cdot g$ es impar; g^k es par (si k es par); g^k es impar (si k es impar)

16. Determinar cuáles de las siguientes funciones son periódicas, y calcular su periodo.

$f(x) = sen4x\quad g(x) = tg(\frac{x}{3})\quad l(x) = sen(3x+2)$

17. Sea f una función cualquiera y g una función periódica.¿Es posible afirmar que $f \circ g$ y $g \circ f$ sean periódicas?

Justifica que $f(x) = \frac{tg^2 3x + ln(tg3x)}{1+tg3x}$ es periódica.