WORKSHEET 4: Applications of the Derivative

1. (*)Halla el polinomio de Taylor de orden 2 en a y calcula el valor aproximado de la función mediante este polinomio en $x = a + 0.1$.

a) $f(x) = e^x$ en $a = 0$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ en $a = 1$

a) $P(x) = 1 + x + x^2/2$, luego $f(0.1) \approx 1.105$

b) $P(x) = (x-1) - 3\dfrac{(x-1)^2}{2}$, luego $f(1.1) \approx 0.085$

2. (*)Dado el polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$ de f determina si la función tiene un máximo o mínimo local en el punto $(0, f(0))$.

a) $P(x) = 1 + 2x^2$ b) $P(x) = 1 + x + x^2$ c) $P(x) = 1 - 2x^2$

a) f tiene un mínimo local en el punto $(0, f(0))$.

b) f no tiene ni máximo ni mínimo local en el punto $(0, f(0))$.
c) f tiene un máximo local en el punto $(0, f(0))$.

3. Calcula los máximos y mínimos (relativos y absolutos) de f en los intervalos indicados:

a)(*) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$ en $[-1, 2]$ b) $f(x) = xe^{-x}$ en $[\frac{1}{2}, \infty)$, $[0, \infty)$ y $\mathbb{R}$

a) i) f alcanza mínimo local en x=0 y máximo local en x=1.

ii) f alcanza su mínimo global en $x = 0$.
iii) f alcanza su máximo global en $x = -1$.
b) i) f alcanza un máximo local y global en $x = 1$.
ii) f alcanza un mínimo global, pero no local, en $x = 0$, cuando está definida sobre $[0, \infty)$.
iii) f no alcanza ni mínimo global ni local definida sobre $[\frac{1}{2}, \infty)$ ni sobre $\mathbb{R}$.

4. (*)Calcula en qué punto es mayor la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = -x^3 + 2x^2 + x + 2$.

$x = \frac{2}{3}$.

5. (*)La Figura A muestra la gráfica de la derivada de una función f. Determina el crecimiento y la convexidad de f, extremos relativos y puntos de inflexión.

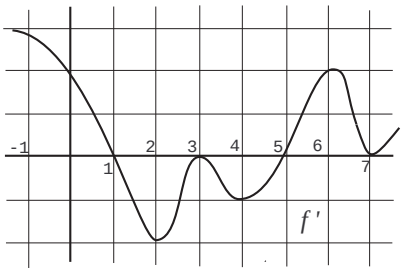

Figure A

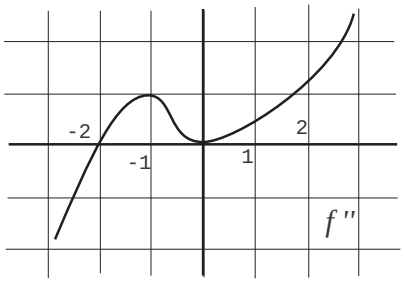

Figure B

f es creciente en $(-\infty, 1]$ y en $[5, \infty)$ y f es decreciente en $[1, 5]$.

Por lo tanto, f alcanza un máximo relativo en 1 y un mínimo relativo en 5. Por otro lado,

f es convexa en [2,3], [4,6] y en [7,∞) y f es cóncava en ($-\infty$,2], [3,4] y en [6,7].

Por lo tanto, f tiene puntos de inflexión en 2, 3, 4, 6 y 7.

6. La Figura B muestra la gráfica de la derivada segunda de una función f. Determina los intervalos de convexidad de f y los puntos de inflexión. Determina el crecimiento y los extremos relativos de f supuesto que $f'(-3) = f'(0) = 0$.

   f es convexa en [-2, ∞). f es cóncava en $(-\infty, -2]$.

   Por lo tanto, f tiene un punto de inflexión en x=-2.

   Además, f es creciente en $(-\infty, -3]$.Análogamente, se cumple que f es decreciente en $[-3, 0]$.

   De la misma forma, f es creciente en $[0, \infty)$.

   Por lo tanto, f tiene un máximo local en x=-3 y un mínimo local en x=0.

7 (*)Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, y sea $x > 0$. Comprobar gráficamente las siguientes desigualdades:
$f(1) < \frac{1}{2}(f(1-x) + f(1+x)) < \frac{1}{2}(f(1-2x) + f(1+2x))$

8 (*)Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava, y sea $x > 0$. Comprobar gráficamente las siguientes desigualdades:
$f(1) > \frac{1}{2}(f(1-x) + f(1+x)) > \frac{1}{2}(f(1-2x) + f(1+2x))$

9. Sea $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ convexa tal que $f'(1) = 0$

   a) Hallar los extremos locales de f.

   b) ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?

   c) Supongamos ahora $f : [0, n] \to \mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?

   a) y b): 1 es minimizador local y global de f

   Además, no puede existir maximizador global de f, pues $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

   c) En este caso, además de lo dicho respecto a los minimizadores, podemos asegurar que existirá maximizador global, que será el punto 0 (si $f(n) \leq f(0)$) o el punto n (si $f(0) \leq f(n)$).

10. (*)Dadas las funciones de coste $C(x) = 4000 + 10x + 0.02x^2$ y demanda $p(x) = 100 - \frac{x}{100}$, halla el precio p por unidad que produce el máximo beneficio.

    $p = 85$

11. (*)Sea $p(x) = x^2 - x + \frac{1}{3}$ el precio de venta de 1 kilo de plutonio cuando se venden x. Sabiendo que la empresa vende en el mercado un máximo de 2 kilos, halla el valor de x que maximiza los ingresos de la empresa. Podemos suponer que todos los costes de la empresa los paga el estado.

    El ingreso máximo se alcanza en $x = 2$.

12. (*)Sea $p(x) = 100 - \frac{x^2}{2}$ la función de demanda de un producto y $C(x) = 48 + 4x + 3x^2$ su función de coste. ¿Cuál es la producción x que minimiza el coste medio?

    $x = 4$.