HOJA 3: Diferenciación de funciones de 1 variable

1. Halla los puntos donde las siguientes funciones tienen tangente horizontal.
 a) $f(x) = x^3 + 1$ b) $f(x) = 1/x^2$ c) $f(x) = x + \sin x$
 d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ e) $f(x) = e^x - x$ f) $f(x) = \sin x + \cos x$
 a) $x = 0$; b) nunca; c) $x = \pi + 2k\pi$; d) nunca; e) $x = 0$; f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$;
2. (*) Prueba que las gráficas de $y = x$ e $y = 1/x$ tienen rectas perpendiculares entre sí en los puntos de corte.
3. ¿En qué punto la tangente a la curva $y^2 = 3x$ es paralela a la recta $y = 2x$?
 El punto de la curva es el $(\frac{3}{16}, \frac{3}{4})$.
4. (*) Calcula el punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$.
 El punto de corte es $x = 1/2$.
5. Calcula a para que la tangente a la gráfica de $f(x) = a/x + 1$ en el punto $(1, f(1))$ corte al eje horizontal en $x = 3$.
 Luego el punto de corte será $x=3$ cuando $a=1$.
6. Determina el ángulo que forman las curvas $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ e $y = \frac{1}{2}(x^3 - x)$ en los puntos de corte.
 En $x = -1$ el ángulo es $\frac{\pi}{2}$. En $x = 1$ el ángulo es 0 .
7. (*) Sea $f(x) = 2[\ln(1 + g^2(x))]^2$. Sabiendo que $g(1) = g'(1) = -1$, calcula $f'(1)$.
 $f'(1) = 4 \ln(2)$.
8. (*) Sabiendo que $a^b = e^{b \ln a}$, deriva $f(x) = x^{\sin x}$ y $g(x) = (\sqrt{x})^x$.
 $f'(x) = x^{\sin x} \sin x (\cos x \ln x + \sin x/x)$.
 $g'(x) = (\sqrt{x})^x (\ln x + 1)/2$.
9. (*) Sean $f(x) = \ln(1 + x^2)$ y $g(x) = e^{2x} + e^{3x}$. Calcula $h(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, $h'(0)$ y $v'(0)$.
 $h(x) = \ln(1 + e^{4x} + e^{6x} + 2e^{5x})$, $h'(0) = 4$
 $v(x) = (1 + x^2)^2 + (1 + x^2)^3$, $v'(0) = 0$.
10. Sea $f : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ continua y biyectiva.
 a) Supongamos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(0)$.
 b) Supongamos ahora que $f(0) = 1$ y $f'(0) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(1)$.
 c) Supongamos ahora que $f(1) = 0$ y $f'(1) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(0)$.
 a) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\alpha}$.
 b) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\alpha}$
 c) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\alpha}$
11. (*) Suponiendo que las siguientes ecuaciones definen a y como función derivable de x , calcula y' en los puntos que se indican:
 a) $x^3 + y^3 = 2xy$ en $(1, 1)$.
 b) $x^2 + y^2 = 25$ en $(3, 4)$, $(0, 5)$ y $(5, 0)$.
 a) $y' = -1$. b) $y' = \frac{-3}{4}$ en $(3, 4)$. $y' = 0$ en $(0, 5)$. No existe derivada en $(5, 0)$.
12. (*) Halla a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \geq 1 \\ ax^2 + bx - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ sea derivable.
 f derivable en 1 equivale a $a = -3, b = 9$.

13. Aplica el teorema del valor medio a f en el intervalo indicado y halla los valores c de la tesis del teorema.

a) $f(x) = x^2$ en $[-2, 1]$

b) $f(x) = -2 \operatorname{sen} x$ en $[-\pi, \pi]$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en $[0, 1]$

d) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ en $[0, \pi]$

14. (*) Sea $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Determinar los extremos globales.

El mínimo se alcanza en -3 y el máximo se alcanza en -1 y en 2 .

15. Calcula los siguientes límites:

a) (*) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ c) (*) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ d) (*) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x-1} \right)$

16. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) (*) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + x^2 + x + 1}$

c) (*) $f(x) = 2x + e^{-x}$

d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

e) (*) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$

f) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2 \operatorname{sen} x}{x-7}$

g) (*) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

h) (*) $f(x) = xe^{1/x}$

i) (*) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

a) Asíntotas verticales en $x=2$ y en $x=-2$.

Por otra parte, la asíntota oblicua en ∞ y en $-\infty$ es $y = 2x - 3$.

c) $y = 2x$ es la asíntota oblicua en ∞ .

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}} = -\frac{1}{2}$. No hay más asíntotas.

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$, y no hay más asíntotas verticales.

Por otro lado, $y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$, y no hay asíntota horizontal, ni oblicua en ∞ .

h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = \infty$, y no hay más asíntotas verticales.

Por otro lado, $y = x + 1$ es la asíntota oblicua en ∞ , también es la asíntota oblicua en $-\infty$.

i) No hay asíntota vertical.

Por otro lado, $y = 0$ es la asíntota horizontal en ∞ . Por último, la recta $y = -x$ es la asíntota oblicua en $-\infty$.