HOJA 2: Límites y Continuidad

1. (*)Calcular:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^3+2x^2-x}{5x^2+2x}$ b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x-2}$ c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+3x^4}}$ e) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{senx}{x}$ f) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2cosx+1}{x^2+1}$

g) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+x+2}{x^2-7x+1}$ h) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-ax^3}{x^2+1}$ i) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4-x^3}{x^2+b}$

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^3+2x^2-x}{5x^2+2x}=-1/2.$

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x-2}=7$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+3x^4}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

e) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{senx}{x}=0.$

f) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2cosx+1}{x^2+1}$ no existe.

g) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+2x^2+x+2}{x^2-7x+1}=-\infty.$

h) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-ax^3}{x^2+1}=\infty.$

i) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4-x^3}{x^2+b}=0.$

2. Hallar las discontinuidades (si las hay) de las funciones que siguen:

a)(*)$f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ b) (*)$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+1} & si & x<-1.\\ e^{1/x} & si & -1\le x<0\\ \pi & si & x=0\\ 1/x & si & 0<x\end{cases}$

a) f es discontinua en x=3.

b) g no es continua ni en -1 ni en 0.

3. (*)Calcular

a) $\lim_{x\to-3^+}\dfrac{x^2}{x^2-9}$ b) $\lim_{x\to-3^-}\dfrac{x^2}{x^2-9}$ c) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2}{senx}$ d) $\lim_{x\to 0^-}(1-1/x)^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x}{x^3}$

a) $\lim_{x\to-3^+}\dfrac{x^2}{x^2-9}=-\infty.$

b) $\lim_{x\to-3^-}\dfrac{x^2}{x^2-9}=\infty.$

c) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2}{senx}=\infty.$

d) $\lim_{x\to 0^-}(1-1/x)^{\frac{1}{x}}=0.$

e) $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x}{x^3}=-\infty.$

4. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones:

$$(*)f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x} \quad (*)h(x) = \sqrt{x^2-1} \quad (*)m(x) = \frac{1}{\ln x} \quad (*)n(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

a) $y = x$ es asíntota oblicua en ∞ (y, análogamente, en $-\infty$). Por otra parte, $x = -1, x = 1$ son las asíntotas verticales.

b) $y = x$ es asíntota oblicua en ∞ (y, análogamente, en $-\infty$). Por otra parte, $x = 0$ es la única asíntota vertical.

c) $y = x$ es asíntota oblícua en ∞.Sin embargo, la asíntota en $-\infty$ es $y = -x$.

d) $y = 0$ es la asíntota horizontal en ∞, $x = 0$ no es una asíntota vertical, $x = 1$ es una asíntota vertical.

e) $y = 1$ es la asíntota horizontal en ∞ y en -∞, $x = 0$ es la única asíntota vertical.

5. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

6. (a) (*) Usar el teorema de los valores intermedios para comprobar que las funciones que siguen tienen un cero en el intervalo indicado.

i)$f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[2, 4]$; ii)$g(x) = x^3 + 3x - 2$ en $[0, 1]$.

(b) (*) Obtener mediante particiones del intervalo y aplicaciones sucesivas de Bolzano, el cero con un error de ± 0.25.

x=3 es un cero de f con total exactitud. Por otra parte, x=3/4 es un cero de g con un error menor que ± 0.25.

7. (*)Comprueba que las ecuaciones $x^4 - 11x + 7 = 0$ y $2^x - 4x = 0$ tienen al menos dos soluciones.

a) Hay una raíz entre 0 y 1, y otra raíz entre 1 y 2.

b) Hay una raíz entre 0 y 1. Por otra parte $g(4) = 0$.

8. (*)Demuestra que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución. Determina la parte entera de dicha solución.

La función es creciente, por eso la solución, si existe, será única.

Por otro lado, la parte entera de la solución es -1, pues $f(-1) < 0 < f(0)$.

9. Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$, demostrar que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$

10. (*)Discutir en los casos siguientes si las funciones alcanzan extremos globales y/o locales en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2 \quad x \in [-1, 1]$ b) $g(x) = x^3 \quad x \in [-1, 1]$

a) f alcanza máximo global en -1 y en 1. No alcanza máximos locales.

f alcanza mínimo local y global en 0.

b) g alcanza mínimo global en -1 y máximo global en 1.

No alcanza extremos locales.

11. Sustituir en el problema anterior el intervalo dado por $[0, \infty)$ o por $\mathbb{R}$ en cada una de las funciones.

En $[0, \infty)$: ni f ni g alcanzan máximo global ni extremos locales. f y g alcanzan mínimo global en 0.

En $\mathbb{R}$: f alcanza mínimo local y global en 0. g no alcanza mínimo ni local ni global. Ni f ni g alcanzan máximo global ni local.