HOJA 1: La recta real. Funciones

1. Para cada una de las desigualdades que siguen, determinar el conjunto de números reales que las satisfacen. Dibujar dicho conjunto.

a)(*) $|9-2x|<1$ b)(*) $-5|x+3|<4x-5$ c)(*) $\dfrac{|x|}{3}+2<|x|$

d)(*) $1<|3-2x|$ e)(*) $\dfrac{(x^2-16)(x-1)}{x-3}\geq 0$ f) $|x-3|+|x+3|<10$

a) $Sol:(4,5)$

b) $Sol:(-\infty,-20)\cup(-10/9,\infty)$.

c) $Sol:(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.

d) $Sol:(-\infty,1)\cup(2,\infty)$.

e)$Sol:(-\infty,-4]\cup[1,3)\cup[4,\infty)$.

f) $Sol.:(-5,5)$.

2. (*)Interpreta geométricamente las desigualdades a), b), c) y d) mediante las funciones

a) $y=|9-2x|$; $y=1$ b) $y=-5|x+3|$; $y=4x-5$

c) $y=\dfrac{|x|}{3}+2$; $y=|x|$ d) $y=1$; $y=|3-2x|$

3. Discutir si se cumplen las desigualdades siguientes :

a) (*) $|x+y|\leq|x|+|y|$ b)(*) $|x|+|y|\leq|x+y|$ c)(*) $|x-y|\leq|x|+|y|$ d)(*) $|x|-|y|\leq|x-y|$

a) Siempre es cierta.

b) Solo se cumple si $x,y\in[0,\infty)$ o si $x,y\in(-\infty,0]$.

c) Se cumple siempre.

d) Se cumple siempre.

4. Discutir la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a) $x<y\Rightarrow x^2<y^2$ b) $|x|<|y|\Rightarrow x^2<y^2$

c) $x^2<y^2\Rightarrow x<y$ d) $x^2<y^2\Rightarrow|x|<|y|$

a) Si $y\leq 0$, siempre es falsa; si $0\leq x$,siempre es cierta; en el resto de los casos, depende.

b) y d) siempre son ciertas.

c) Si $y<0$, siempre es falsa; si $0<y$,siempre es cierta; si $y=0$,es imposible.

5. Obtener para los conjuntos $A\subset\mathbb{R}$ que se definen a continuación, el máximo y el mínimo, si los hubiera, para $\alpha=-1$, $\alpha=0$ y $\alpha=1$

a) $A=\{x:e^x\leq\alpha\}$ b) $A=\{x:e^x\geq\alpha\}$ c) $A=\{x:\ln x\leq\alpha\}$ d) $A=\{x:\ln x\geq\alpha\}$

a) si $\alpha=-1$ o si $\alpha=0\Longrightarrow A$ no tiene ni máximo ni mínimo; si $\alpha=1\Longrightarrow A$ no tiene mínimo, pero max(A)=0.

b) si $\alpha=-1$ o si $\alpha=0\Longrightarrow A$ no tiene ni máximo ni mínimo;si $\alpha=1\Longrightarrow A$ no tiene máximo, pero min(A)=0.

c) si $\alpha=-1,\alpha=0$ o si $\alpha=1\Longrightarrow A$ no tiene mínimo, pero max(A)=$e^{-1},1,e$, respectivamente.

d) si $\alpha=-1,\alpha=0$ o si $\alpha=1\Longrightarrow A$ no tiene máximo, pero min(A)=$e^{-1},1,e$, respectivamente.

6. (*)Sean $f(x)=1/x$ y $g(x)=x^2-1$.

a) Hallar el dominio y la imagen de estas funciones.
b) Hallar $f(g(2))$ y $g(f(2))$.
c) Hallar $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

a) $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)=Im(f)$. $Dom(g)=\mathbb{R},Im(g)=[-1,\infty)$.

b) $f(g(2))=\frac{1}{3}$ y $g(f(x))=-\frac{3}{4}$.

c) $f(g(x))=\frac{1}{x^2-1}$ y $g(f(x))=\frac{1}{x^2}-1$.

7. Repasar las gráficas de las funciones: a)(*) $f(x) = x^2$ b)(*)$f(x) = e^x$ c)(*)$f(x) = lnx$

En cada caso dibujar las gráficas de las funciones siguientes a partir de las anteriores, interpretando geométricamente los resultados.

i) $g(x) = f(x+1)$ ii) $h(x) = -2f(x)$ iii) $p(x) = f(3x)$
iv) $s(x) = f(x) + 1$ v) $r(x) = |f(x)|$ vi) $m(x) = f(|x|)$

i) Trasladar la gráfica una unidad a la izquierda.

ii) Estirar la gráfica verticalmente ($2f(x)$) y, luego, hacer una reflexión respecto al eje horizontal ($-2f(x)$).

iii) Comprimir horizontalmente la gráfica.

iv) Trasladar verticalmente la gráfica una unidad hacia arriba.

v) Mantener invariante la parte de la gráfica que queda encima del eje horizontal, y obtener

la parte simétrica respecto al eje horizontal de la parte de gráfica que queda debajo de este eje.

vi) Mantener invariante la parte de la gráfica que queda a la derecha del eje vertical,

suprimir la parte izquierda de la gráfica y sustituirla por la simétrica de la parte que queda a la derecha del eje vertical.

8. (*)Hallar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a)$f(x) = ln(1 + |x|)$ b)$g(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ c) $h(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$

a) $Dom(f) = \mathbb{R}, Im(f) = [0, \infty)$

b) $Dom(g) = [-1, 1], Im(g) = [1, 2]$

c) $Dom(h) = [-1, 1], Im(h) = [1, e]$

9. (*)Sean f, $g : I \to \mathbb{R}$ funciones crecientes. Discutir la verdad o falsedad de las siguiente afirmaciones

a) $f + g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente

b) $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente

a) Obvio.

b) Si f, g positivas: obvio.

10. Sean f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones monótonas. Discutir cuando será $g \circ f$ creciente o decreciente dependiendo del comportamiento de f y g (en total cuatro casos).

a) gof será creciente si ambas son crecientes o decrecientes.

b) gof será decreciente si una de ellas es decreciente y la otra es creciente.

11. Para cada una de las siguientes funciones, por ejemplo f, hallar los intervalos I, J para que $f : I \to J$ sea biyectiva.

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = \ln |x|$ c) $h(x) = e^{-x^2}$

a) $f : (-\infty, 0] \longrightarrow [0, \infty)$, $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$

b) $g : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

c) $h : (-\infty, 0] \to (0, 1]$, $h : [0, \infty) \to (0, 1]$.

12. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}$ c) $h(x) = \dfrac{x^3}{x^5 + 1}$

a) Par; b) Impar; c) ni par ni impar.

13. (*)Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

$f(x) = (x^3 - 5)^5$, $g(x) = (\sqrt[3]{x - 5})^5$

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{5 + \sqrt[5]{x}}$.

b) $g^{-1}(x) = 5 + x^{3/5} = 5 + (\sqrt[5]{x})^3$.

14. Sea f una función par y g una función impar. Demuestra que:

$|g|$ es par; $f \circ g$ es par; $g \circ f$ es par;
$f \cdot g$ es impar; g^k es par (si k es par); g^k es impar (si k es impar)