HOJA 4: Aplicaciones de la derivada

1. (*)Halla el polinomio de Taylor de orden 2 en a y calcula el valor aproximado de la función mediante este polinomio en $x = a + 0.1$.

a) $f(x) = e^x$ en $a = 0$ b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ en $a = 1$

2. (*)Dado el polinomio de Taylor de orden 2 en $a = 0$ de f determina si la función tiene un máximo o mínimo local en el punto $(0, f(0))$.

a) $P(x) = 1 + 2x^2$ b) $P(x) = 1 + x + x^2$ c) $P(x) = 1 - 2x^2$

3. Calcula los máximos y mínimos (relativos y absolutos) de f en los intervalos indicados:

a)(*) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$ en $[-1, 2]$ b) $f(x) = xe^{-x}$ en $[\frac{1}{2}, \infty)$, $[0, \infty)$ y $\mathbb{R}$

4. (*)Calcula en qué punto es mayor la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = -x^3 + 2x^2 + x + 2$.

5. (*)La Figura A muestra la gráfica de la derivada de una función f. Determina el crecimiento y la convexidad de f, extremos relativos y puntos de inflexión.

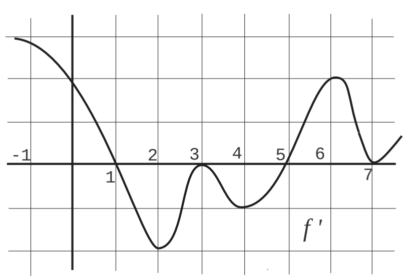

Figura A

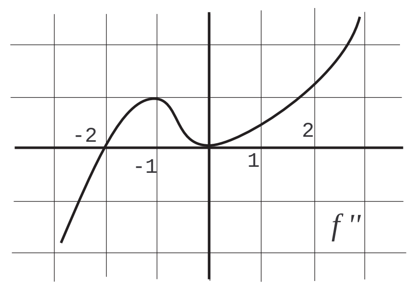

Figura B

6. La Figura B muestra la gráfica de la derivada segunda de una función f. Determina los intervalos de convexidad de f y los puntos de inflexión. Determina el crecimiento y los extremos relativos de f supuesto que $f'(-3) = f'(0) = 0$.

7. (*)Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, y sea $x > 0$. Comprobar gráficamente las siguientes desigualdades:

$$f(1) < \frac{1}{2}\left(f(1-x) + f(1+x)\right) < \frac{1}{2}\left(f(1-2x) + f(1+2x)\right)$$

8. (*)Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava, y sea $x > 0$. Comprobar gráficamente las siguientes desigualdades:

$$f(1) > \frac{1}{2}\left(f(1-x) + f(1+x)\right) > \frac{1}{2}\left(f(1-2x) + f(1+2x)\right)$$

9. Sea $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ convexa tal que $f'(1) = 0$

a) Hallar los extremos locales de f.

b) ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?

c) Supongamos ahora $f : [0, n] \to \mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir de los extremos globales de f?

10. (*)Dadas las funciones de coste $C(x) = 4000 + 10x + 0.02x^2$ y demanda $p(x) = 100 - \frac{x}{100}$, halla el precio p por unidad que produce el máximo beneficio.

11. (*)Sea $p(x) = x^2 - x + \frac{1}{3}$ el precio de venta de 1 kilo de plutonio cuando se venden x. Sabiendo que la empresa vende en el mercado un máximo de 2 kilos, halla el valor de x que maximiza los ingresos de la empresa. Podemos suponer que todos los costes de la empresa los paga el estado.

12. (*)Sea $p(x) = 100 - \frac{x^2}{2}$ la función de demanda de un producto y $C(x) = 48 + 4x + 3x^2$ su función de coste. ¿Cuál es la producción x que minimiza el coste medio?