

HOJA 3: Diferenciación de funciones de 1 variable

1. Halla los puntos donde las siguientes funciones tienen tangente horizontal.
- a) $f(x) = x^3 + 1$ b) $f(x) = 1/x^2$ c) $f(x) = x + \sin x$
d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ e) $f(x) = e^x - x$ f) $f(x) = \sin x + \cos x$
2. (*) Prueba que las gráficas de $y = x$ e $y = 1/x$ tienen rectas perpendiculares entre sí en los puntos de corte.
3. ¿En qué punto la tangente a la curva $y^2 = 3x$ es paralela a la recta $y = 2x$?
4. (*) Calcula el punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$.
5. Calcula a para que la tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{a}{x} + 1$ en el punto $(1, f(1))$ corte al eje horizontal en $x = 3$.
6. Determina el ángulo que forman las curvas $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ e $y = \frac{1}{2}(x^3 - x)$ en los puntos de corte.
7. (*) Sea $f(x) = 2[\ln(1 + g^2(x))]^2$. Sabiendo que $g(1) = g'(1) = -1$, calcula $f'(1)$.
8. (*) Sabiendo que $a^b = e^{b \ln a}$, deriva $f(x) = x^{\sin x}$ y $g(x) = (\sqrt{x})^x$.
9. (*) Sean $f(x) = \ln(1 + x^2)$ y $g(x) = e^{2x} + e^{3x}$. Calcula $h(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, $h'(0)$ y $v'(0)$.
10. Sea $f : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ continua y biyectiva.
- a) Supongamos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(0)$.
b) Supongamos ahora que $f(0) = 1$ y $f'(0) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(1)$.
c) Supongamos ahora que $f(1) = 0$ y $f'(1) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(0)$.
11. (*) Suponiendo que las siguientes ecuaciones definen a y como función derivable de x , calcula y' en los puntos que se indican:
- a) $x^3 + y^3 = 2xy$ en $(1, 1)$.
b) $x^2 + y^2 = 25$ en $(3, 4)$, $(0, 5)$ y $(5, 0)$.
12. (*) Halla a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \geq 1 \\ ax^2 + bx - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ sea derivable.
13. Aplica el teorema del valor medio a f en el intervalo indicado y halla los valores c de la tesis del teorema.
- a) $f(x) = x^2$ en $[-2, 1]$ b) $f(x) = -2 \sin x$ en $[-\pi, \pi]$
c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ en $[0, 1]$ d) $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ en $[0, \pi]$
14. (*) Sea $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Determinar los extremos globales.
15. Calcula los siguientes límites:
- a) (*) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ c) (*) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ d) (*) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x-1} \right)$
16. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:
- a) (*) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + x^2 + x + 1}$ c) (*) $f(x) = 2x + e^{-x}$
d) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ e) (*) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$ f) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2 \sin x}{x-7}$
g) (*) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ h) (*) $f(x) = xe^{1/x}$ i) (*) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$