

## HOJA 2: Límites y Continuidad

1. (\*)Calcular:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 2x^2 - x}{5x^2 + 2x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + 3x^4}} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cos x + 1}{x^2 + 1} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 - 7x + 1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - ax^3}{x^2 + 1} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3}{x^2 + b} \end{array}$$

2. Hallar las discontinuidades (si las hay) de las funciones que siguen:

$$\text{a) (*) } f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \quad \text{b) (*) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+1} & \text{si } x < -1. \\ e^{1/x} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \pi & \text{si } x = 0 \\ 1/x & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

3. (\*)Calcular

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{x^2 - 9} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2 - 9} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\operatorname{sen} x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 1/x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x^3}$$

4. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones:

$$\text{(*) } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad \text{(*) } h(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{(*) } m(x) = \frac{1}{\ln x} \quad \text{(*) } n(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

5. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

6. (a) (\*) Usar el teorema de los valores intermedios para comprobar que las funciones que siguen tienen un cero en el intervalo indicado.

$$\text{i) } f(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ en } [2, 4]; \quad \text{ii) } f(x) = x^3 + 3x - 2 \text{ en } [0, 1].$$

(b) (\*) Obtener mediante particiones del intervalo y aplicaciones sucesivas de Bolzano, el cero con un error de  $\pm 0.25$ .

7. (\*) Comprueba que las ecuaciones  $x^4 - 11x + 7 = 0$  y  $2^x - 4x = 0$  tienen al menos dos soluciones.

8. (\*) Demuestra que la ecuación  $x^7 + 3x + 3 = 0$  tiene una única solución. Determina la parte entera de dicha solución.

9. Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $[a, b]$  y  $f(a) < g(a)$ ,  $f(b) > g(b)$ , demostrar que existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f(x_0) = g(x_0)$

10. (\*) Discutir en los casos siguientes si las funciones alcanzan extremos globales y/o locales en los intervalos indicados:

$$\text{a) } f(x) = x^2 \quad x \in [-1, 1] \quad \text{b) } f(x) = x^3 \quad x \in [-1, 1]$$

11. Sustituir en el problema anterior el intervalo dado por  $[0, \infty)$  o por  $\mathbb{R}$  en cada una de las funciones.