Tema 1

La recta real. Funciones de una variable

1.1 Desigualdades en la recta real

Trabajaremos en el campo de los números reales, $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales es un conjunto totalmente ordenado para lo cual utilizamos las desigualdades. Geométricamente, $x < y$ significa que x está la izquierda de y.

Propiedades:

1. $a < b \Longleftrightarrow a + K < b + K$,
2. Si $K > 0: \; a < b \Longleftrightarrow aK < bK$. Si $K < 0: \; a < b \Longleftrightarrow aK > bK$
3. $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d; \; 0 \leq a < b, 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$
4. $ab > 0 \Longleftrightarrow [a > 0, b > 0$ o $a < 0, b < 0]; \; ab < 0 \Longleftrightarrow [a > 0, b < 0$ o $a < 0, b < 0]$
5. si n es par: $x^n > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$; si n es impar: $x^n > 0 \Longleftrightarrow x > 0$.

Definición 1.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ es un Intervalo $\Longleftrightarrow [\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, \; x < z < y \Rightarrow z \in I]$ y Cardinal$(I) > 1$.

Es decir, un intervalo contiene al menos dos puntos y todos los puntos intermedios están contenidos en él.

Los intervalos pueden ser cerrados (si contienen todos los puntos frontera) o abiertos (si no contienen ninguno de los puntos frontera).

Pueden ser acotados (si no se acercan a $\pm\infty$) o no acotados (si se acercan a $\pm\infty$).

1.2 Valor Absoluto

Para el estudio de las propiedades de las funciones necesitamos el concepto de valor absoluto de un número real.

Definición 1.2.1. Sea a un número real. Entonces el valor absoluto de a es el número real $|a|$ definido por

$$|a| = \begin{cases} -a, \text{ si } a < 0 \\ a, \text{ si } a \geq 0 \end{cases} .$$

El valor absoluto $|a|$ se puede interpretar como la distancia del punto a al origen en la recta real.

1.2.1 Propiedades

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $|a| \geq 0$, y $|a| = 0$ si, y solo si $a = 0$.
2. $-|a| \leq a \leq |a|$.
3. $|ab| = |a||b|$.
4. $|a| = \sqrt{a^2}$
5. If $a^2 \leq b^2$, entonces $|a| \leq |b|$.
6. (Desigualdad Triangular)
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$
7. Sea p un número positivo. Entonces
   (a) $|a| \leq p$ si, y solo si $-p \leq a \leq p$.
   (b) $|a| \geq p$ si, y solo si $a \geq p$ o $a \leq -p$.

Ejemplo 1.2.2. Demostrar la desigualdad triangular.

SOLUCIÓN:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

de donde concluímos que $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Ejemplo 1.2.3. Hallar el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad

$$5 < |2x-1| \leq 9$$

SOLUCIÓN: De (6b) tenemos que, $5 < |2x-1|$ si, y solo si $2x-1 > 5$ o $2x-1 < -5$; por lo que, $x > 3$ o $x < -2$, esto es, $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. De(6a) tenemos que, $|2x-1| \leq 9$ si, y solo si $-9 \leq 2x-1 \leq 9$; por lo que $-4 \leq x \leq 5$, esto es, $x \in [-4, 5]$. Ambas desigualdades se verifican simultáneamente si, y solo si x pertenece a $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ y a $[-4, 5]$. En consecuencia, el conjunto solución es $[-4, -2) \cup (3, 5]$.

1.3 Funciones

Una *función* f consiste en dos conjuntos, D y R, llamados el *dominio* y el *rango* de f, y una regla que asigna a cada elemento de D exactamente un elemento de R, llamado la imagen de x mediante f, o valor de la función f en x. Esto se expresa como $f : D \longrightarrow R$.

El *conjunto imagen* de la función f es el conjunto $\text{Im}(f) = \{f(x) \,|\, x \in D\}$. La imagen de f es un subconjunto del rango de f, $\text{Im}(f) \subseteq R$.

La *gráfica* de f es el conjunto $G(f)$ de pares ordenados (x, y) tal que x está en el dominio de la función e y es el correspondiente elemento en el rango. El *valor* de la función en $x \in D$ es el elemento $y \in R$ tal que $(x, y) \in G$ y será denotado por $y = f(x)$. Así,

$$G(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D\}.$$

Por ejemplo, si $D = \{1, b, e\}$ y $R = \{-1, h, k, 0\}$, la regla f que asigna $1 \mapsto h$, $b \mapsto h$, $e \mapsto 0$. es una función, pero la regla g que asigna $1 \mapsto \{h, -1\}$, $b \mapsto h$, $e \mapsto 0$, no lo es.

En el primer ejemplo, $\text{Im}(f) = \{h, 0\}$ no coincide con el rango de f. Por otra parte, $G(f) = \{(1, h), (b, h), (e, 0)\}$.

Definición 1.3.1. Sea $f : D \longrightarrow R$ una función. Se dice que f es *inyectiva* si elementos distintos de D tienen imágenes distintas, es decir,

$$x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Se dice que f es *suprayectiva* si todo elemento de R es imagen de algún elemento de D, es decir, $\text{Im}(f) = R$, en otras palabras, para todo y en R, existe $x \in D$ tal que $y = f(x)$.

La función del ejemplo, con $f(1) = f(b) = h$ y $f(e) = 0$ no es inyectiva ni suprayectiva.

Estaremos especialmente interesados en las funciones reales de una variable real con $D, R \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.3.2. El coste de fabricación de x litros de un detergente es de $1 + 1/x$ euros por litro. ¿Cuál es el coste total de fabricación de 100 litros? ¿Cuál será el beneficio si se fabrica x litros de detergente y se vende a 2 euros por litro?

Solución: El coste de fabricación de 100 litros es $100 \times (1 + 1/100) = 101$ euros. Sea $C(x)$ el coste de fabricación de x litros; entonces $C(x) = x(1 + 1/x) = x + 1$. El beneficio $\Pi(x)$ es igual a ventas menos coste, por lo que $\Pi(x) = 2x - C(x) = x - 1$. En particular, si se fabrica 100 litros el beneficio será $\Pi(100) = 99$ euros.

Ejemplo 1.3.3. Los ciudadanos de A pagan impuestos en función de sus ingresos anuales, w (expresados in unidades monetarias, u.m.). Si los ingresos son $w \leq 10$, el individuo no paga impuestos; si $10 < w \leq 30$, entonces la tasa impositiva es $\tau = 18\%$, aplicada a la diferencia $w - 10$, mientras que si $w > 30$, entonces la tasa es de $t = 18\%$ para las 20 primeras u.m. por encima de las 10 u.m. exentas, y una tasa de $t' = 24\%$ para el resto de los ingresos. Escriba la "función de impuestos" de la hacienda pública del país A. Cuál será la cuantía del impuesto para alguien que gana $w = 40$ en un año? Cuál es la tasa efectiva para esta persona? (tener en cuenta que las primeras 10 m.u. están exentas)?

SOLUTION: La función de impuestos está definida a trozos y es prograsiva (rentas más altas pagan más impuestos y además, la tasa impositiva es también mayor).

$$T(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } w \leq 10; \\ 0.18(w-10), & \text{si } 10 < w \leq 30; \\ 0.18 \times 20 + 0.24(w-30), & \text{si } w > 30; \end{cases}$$

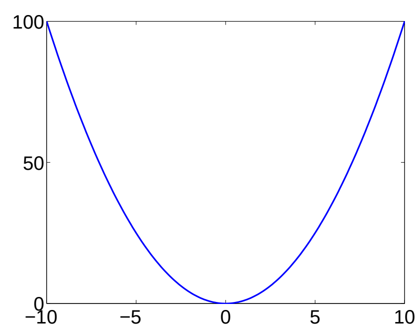
$T(40) = 0.18 \times 20 + 0.24(40-30) = 3.6 + 2.4 = 6$ u.m. La tasa efetiva con ingresos $w > 10$ es

$$\tau(w) = \frac{T(w)}{w-10} \times 100\%.$$

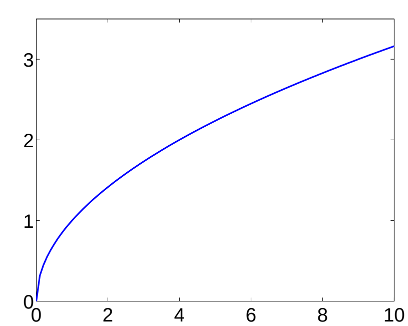
Por tanto, $\tau(40) = \frac{6}{30} \times 100 = 20\%$.

Ejemplo 1.3.4.

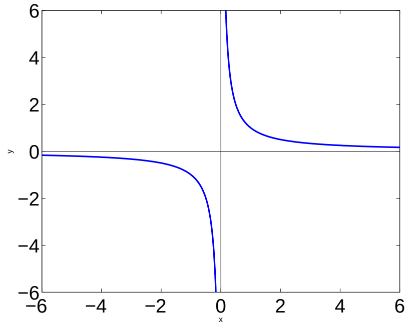
1. Sea $f(x) = x^2$. El dominio es $D = \mathbb{R}$ y el rango es $R = [0, +\infty)$. La gráfica es una parábola que pasa por el punto $(0, 0)$ y que abre hacia arriba.



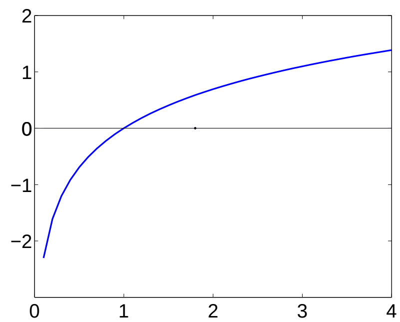
2. Sea $g(x) = \sqrt{x}$. El dominio es $D(g) = [0, +\infty)$ y el rango es $R(g) = [0, +\infty)$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



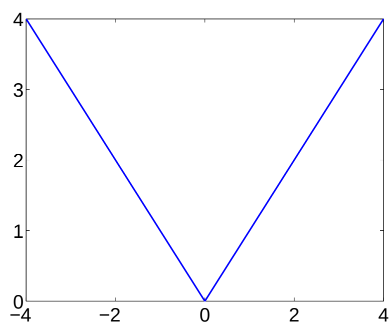
3. Sea $h(x) = 1/x$. El dominio es $D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$ y el rango es $R(h) = \mathbb{R} - \{0\}$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



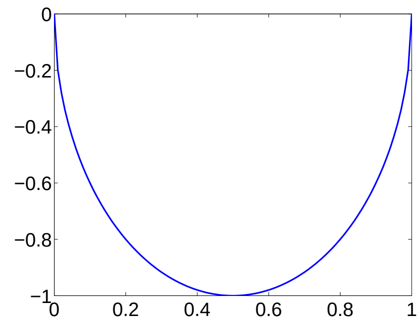
4. Sea $l(x) = \ln x$. El dominio es $D(l) = (0, +\infty)$ y el rango es $R(l) = \mathbb{R}$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



5. Sea $m(x) = |x|$. El dominio es $D(m) = \mathbb{R}$ y el rango es $R(m) = [0, +\infty)$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



6. Sea $n(x) = -2\sqrt{x(1-x)}$. El dominio es $D(n) = [0, 1]$ y el rango es $R(n) = [-1, 0]$. La gráfica se muestra en la siguiente figura.

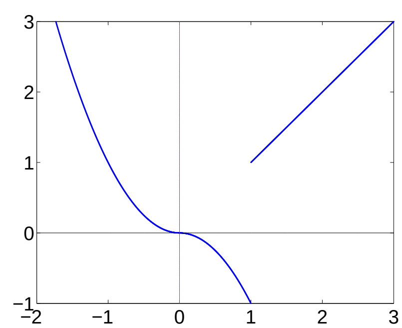


El dominio de una función se desprende de la definición de la función. El rango, en cambio, no está siempre determinado. La gráfica de la función siempre ayuda a visualizar el rango.

Una función puede venir definida a trozos. Como ejemplo, la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0; \\ -x^2, & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

se muestra en la siguiente figura.



1.3.1 Funciones de ingreso, de beneficio y de costes de una empresa

Considere una empresa monopolista que produce un cierto bien en cantidad $x \geq 0$ y lo vende en un mercado donde la función inversa de la demanda, o precio unitario del bien, es $P(x)$. La función de *ingresos* de la empresa es

$$R(x) = xP(x).$$

La producción de x del bien cuesta $C(x)$ unidades monetarias; esta es la función de *costes* de la empresa. La función de *beneficios* de la empresa es la diferencia entre ingresos y coste.

$$\Pi(x) = R(x) - C(x) = xP(x) - C(x).$$

El *coste medio* de cada unidad producida cuando en total se producen x unidades es

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x},$$

Ejemplo típicos son: $P(x) = 100 - 2x$, si $x \leq 50$, $P(x) = 0$, en otro caso; $C(x) = 200 + \frac{1}{2}x^2$ (luego hay costes fijos de 200 u.m., independientemente del nivel de producción).

Por tanto,

$$R(x) = xP(x) = x(100 - 2x),\ (x \leq 50); \quad R(x) = 0,\ (x > 50),$$

es la función de ingresos.

$$\Pi(x) = R(x) - C(x) = x(100 - 2x) - 200 - \frac{x^2}{2},\ (x \leq 50); \quad \Pi(x) = -200 - \frac{x^2}{2},\ (x > 50),$$

son los beneficios.

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{200}{x} + \frac{x}{2},\ (x > 0),$$

es el coste medio.

Podemos plantear y responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el coste medio de producir 20 unidades del bien?

  Es $\overline{C}(20) = \frac{200}{20} + \frac{1}{2}20 = 20$.

- ¿Cuál es el ingreso?

  Es $R(20) = 20(100 - 2 \cdot 20) = 1200$ u.m.

- ¿Cuál es el beneficio?

  Es $\Pi(20) = R(20) - C(20) = 1200 - (200 + \frac{20^2}{2}) = 1200 - 400 = 800$ u.m.

No podemos responder todavía las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuál es el nivel de producción que maximiza beneficios? Este podría ser el objetivo de los propietarios.

(ii) ¿Cuál es el nivel de producción que maximiza ingresos? Este podría ser el objetivo del responsable de ventas.

(iii) ¿Cuál es el nivel de producción que minimiza el coste medio? Este podría ser el objetivo del jefe de almacén.

Aprenderemos a resolver estos y otros problemas a lo largo del curso.

1.3.2 Operaciones con funciones

Consideremos las funciones $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow R$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La suma de f y g es la función definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

2. El producto de la función f por un escalar λ es la función definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

3. El producto de f y g es la función definida por $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

4. El cociente de f y g es la función definida por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ siempre que $g(x) \neq 0$.

1.3.3 Composición de funciones

Sean las funciones $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$. Necesitamos imponer que $R(f) \bigcap D(g) \neq \varnothing$.

Definición 1.3.5. La composición de funciones f y g es la función $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

donde $D \subset D(f)$.

Ejemplo 1.3.6. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 2x$, encontrar $g \circ f$, $f \circ g$ y sus respectivos dominios y rangos.

Solución: Por definición

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\sqrt{4 - x^2}) = 2\sqrt{4 - x^2}, \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x) = \sqrt{4 - (2x)^2} = 2\sqrt{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

Observemos que $g \circ f \neq f \circ g$. Finalmente

$$\begin{aligned}
D(g \circ f) &= [-2, 2], \\
D(f \circ g) &= [-1, 1].
\end{aligned}$$

y (¿por qué?)

$$\begin{aligned}
R(g \circ f) &= [0, 4], \\
R(f \circ g) &= [0, 2].
\end{aligned}$$

1.3.4 Función inversa

La función $\mathrm{id}(x) = x$ es llamada función *identidad*. Se define la inversa de la función f a la función g (si existe) tal que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$.

Definición 1.3.7. La inversa de la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es denotada por f^{-1} y satisface

$$f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in Dom(f) \text{ y } f(f^{-1}(x)) = x \ \forall x \in Im(f) = R(f)$$

Observemos que la inversa de la función f tiene las siguientes propiedades:

1. $y = f(x)$ si y sólo si $x = f^{-1}(y)$;

2. Es única;

3. El dominio de f^{-1} es el rango de f.

4. El rango de f^{-1} es el dominio de f.

Ejemplo 1.3.8. Si $f(x) = \frac{x-1}{2}$ y $g(x) = 2x+1$, f y g son funciones inversas. Puesto que,

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = x$$
$$f(g(x)) = f(2x+1) = \frac{(2x+1)-1}{2} = x.$$

Ejemplo 1.3.9. Encontrar la inversa de $f(x) = 4 - x^2$ para $x \geq 0$.

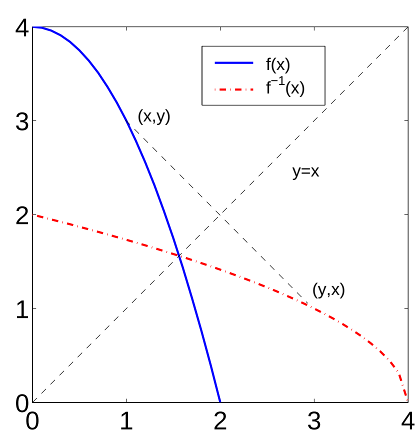
Solución: La inversa de f se puede determinar de la siguiente manera:

1. Fijamos $y = 4 - x^2$.

2. Resolvemos para x en $x = \sqrt{4-y}$ (puesto que $y \geq 0$, ignoramos la raíz negativa).

Por lo que $f^{-1}(y) = \sqrt{4-y}$, con dominio $(-\infty, 4]$. Podemos renombrar las variables y expresar $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$.

Las gráficas de f y su inversa se muestran en la siguiente figura.



Observemos que por cada punto (x, y) en la gráfica de $y = f(x)$, existe un punto (y, x) en la gráfica de $y = f^{-1}(x)$. Esto ocurre por que cada vez que $f(x) = y$, tenemos que $f^{-1}(y) = x$, por la definición de funciones inversas. De aquí que, si doblamos el plano de coordenadas a lo largo de la recta $y = x$, entonces las gráficas de f y f^{-1} coinciden. La recta $y = x$ es la recta de simetría.

Nota 1.3.10. No todas las funciones poseen inversas. Las funciones que tienen inversas son llamadas *funciones uno-a-uno*, lo que significa que para cada valor de y le corresponde exactamente un valor de x. Las funciones uno-a-uno pueden ser identificadas realizando la *prueba de la recta horizontal:* Si la gráfica de f es tal que ninguna línea horizontal corta la gráfica en más de un punto, entonces f es uno-a-uno y por tanto admite inversa.

Ejemplo 1.3.11. La función $y = f(x) = 4-x^2$ no es uno-a-uno en toda la recta real, ya que a $y = 3$ le corresponde dos valores distintos de x, a saber $x = 1$ y $x = -1$: $f(1) = f(-1) = 3$. Por lo que la función f en $\mathbb{R}$ no tiene inversa. Esta es la razón por la cual consideramos en el ejemplo anterior la función en la región $x \geq 0$. La función no pasa la prueba de la recta horizontal en $\mathbb{R}$ pero la prueba es positiva en la región $x \geq 0$ y f admite inversa en $[0, \infty)$.

1.3.5 Simetría y periodicidad

Una función f es *periódica* con *período* $p > 0$ si para todo x en el dominio de f, $f(x+p) = f(x)$ (En realidad, el período $p > 0$ es el valor más pequeño que cumple con esta propiedad). Como sabemos, las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son funciones periódicas con período 2π, y $\tan(x)$ es con período π.

En general, si una función $f(x)$ es periódica con período p, entonces $g(x) = f(cx)$ es periódica con periodo $\frac{p}{|c|}$ $(c \neq 0)$. Esto se puede verificar fácilmente de la siguiente manera:

$$g(x + \frac{p}{|c|}) = f(c(x + \frac{p}{|c|})) = f(cx \pm p) = f(cx) = g(x).$$

Así, la función $\operatorname{sen} 2x$ es periódica con período π.

Una función f es una *función par* si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f. La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y. Las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2 + 2x^4$ y $f(x) = \cos x$ son pares.

Una función f es una *función impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f. La gráfica de una función impar tiene como punto de simetría al origen, esto es, el origen es el punto medio del segmento que une los pares de puntos de la gráfica de f. Las funciones $f(x) = x$, $f(x) = x^3 + x^5$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ son impares.

1.4 Funciones monótonas

Se dice que una función f es monótona *creciente* si para cualquier par de puntos $x, y \in D(f)$ tales que $x < y$ se cumple que $f(x) \leq f(y)$(*estrictamente creciente* si $f(x) < f(y)$).

Se dice que una función f es monótona *decreciente* si para cualquier par de puntos $x, y \in D(f)$ tales que $x < y$ se cumple que $f(x) \geq f(y)$ (*estrictamente decreciente* si $f(x) > f(y)$).

Las definiciones pueden estar referidas a un intervalo I.

Ejemplo 1.4.1. La función $f(x) = x^2$ no es monótona en $\mathbb{R}$ pero es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, \infty)$. Para verificar que es estrictamente creciente en $[0, \infty)$, sea $0 \leq x < y$. Entonces $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) > 0$ puesto que $y > x \geq 0$.

1.5 Funciones monótonas y función inversa

Definición 1.5.1. Una función biyectiva es suprayectiva e inyectiva a la vez.

Obviamente, $f : I \to \mathbb{R}$ inyectiva $\iff$ $f : I \to f(I)$ biyectiva.

Teorema 1.5.2. *f tiene función inversa en $I \Leftrightarrow f$ inyectiva en I.*

Teorema 1.5.3. *Sea f continua en I. Entonces:*
$f : I \to \mathbb{R}$ inyectiva $\Longleftrightarrow f$ monótona en I.

Teorema 1.5.4. *Supongamos que f tiene inversa. Entonces:*

1. *f creciente $\Longleftrightarrow f^{-1}$ creciente*

2. *f decreciente $\Longleftrightarrow f^{-1}$ decreciente.*