

Ejercicio	1	2	3	4	Total
PUNTOS					

Duración: 1 hora y 40 minutos.

APELLIDOS:	NOMBRE:
ID:	GRADO:
	GRUPO:

(1) Sea la función $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$. Se pide:

- Hallar las asíntotas de $f(x)$.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la imagen de $f(x)$.
Sugerencia: Observar que $\ln(a) - b = \ln a - \ln(e^b)$
- Hallar los intervalos de convexidad y concavidad de $f(x)$. Representar $f(x)$.
0,3 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c)

a) En primer lugar, la función es continua en todo $\mathbb{R}$, luego las únicas asíntotas que hay que estudiar son en $\pm\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{2x}) = \ln 1 = 0$, luego $y = 0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.

En cuanto a ∞ : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x} = \frac{\infty}{\infty} = (\text{aplicando L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{-2x} + 1} = 2$; y ahora: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + e^{2x}) - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + e^{2x}) - \ln e^{2x} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + e^{2x}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^{-2x} + 1) = \ln 1 = 0$,

luego $y = 2x$ es la asíntota oblicua en ∞ .

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, derivamos la función y estudiamos su signo:

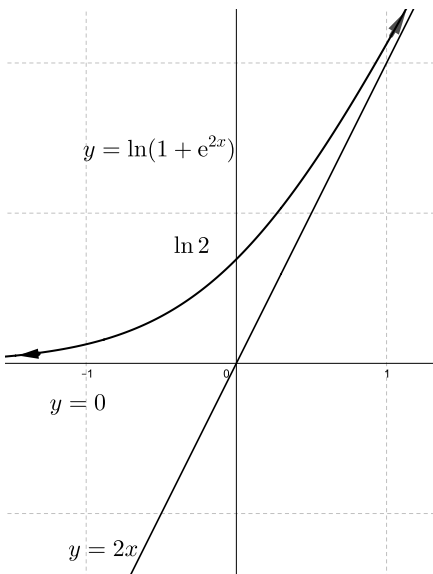
$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} > 0$, luego f es creciente en todo $\mathbb{R}$. En cuanto a la imagen, como $f(x)$ es continua en su dominio, f es creciente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $(0, \infty)$.

c) Para estudiar la concavidad/convexidad, calculamos la derivada segunda.

$f''(x) = \left(\frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)' = \left(\frac{2 + 2e^{2x} - 2}{1 + e^{2x}}\right)' = \left(2 - \frac{2}{1 + e^{2x}}\right)' = \frac{4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} > 0$,

luego la función $f(x)$ es convexa en toda la recta real.

En cuanto a la gráfica de la función, tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



(2) Dada la ecuación $32\sqrt{2+x} - y - y^3 = 62$, se pide:

- (a) Probar que dicha ecuación define de forma implícita la función $y = f(x)$ en un entorno del punto $x = 2, y = 1$.
- (b) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $a = 2$.
- (c) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 2, y = 1$.
Calcular aproximadamente, utilizando la recta tangente, $f(1,9)$.
Comparar dicho valor aproximado con el valor exacto de $f(1,9)$.
Sugerencia para c: utilizar que $f''(2) < 0$.
- 0,2 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).**
-

a) Si consideramos la función $F(x, y) = 32\sqrt{2+x} - y - y^3$, se debe cumplir que:

i) En primer lugar, $F(2, 1) = 64 - 1 - 1 = 62$; y, en segundo lugar

ii) $\frac{\partial F}{\partial y} = -1 - 3y^2 \implies \frac{\partial F}{\partial y}(2, 1) = -4 \neq 0$.

Luego la ecuación define de forma implícita la función $y = f(x)$ en un entorno del punto $x = 2, y = 1$.

b) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$$\frac{32}{2\sqrt{2+x}} - y' - 3y^2 y' = 0$$

sustituyendo $x = 2, y(2) = 1$ se deduce que $8 = 4y'(2) \implies f'(2) = 2$. Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 1 + 2(x - 2)$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$$\frac{(-1/2)16}{(2+x)^{3/2}} - y'' - 6y(y')^2 - 3y^2 y'' = 0$$

sustituyendo $x = 2, y(2) = 1, y'(2) = 2$ se deduce que:

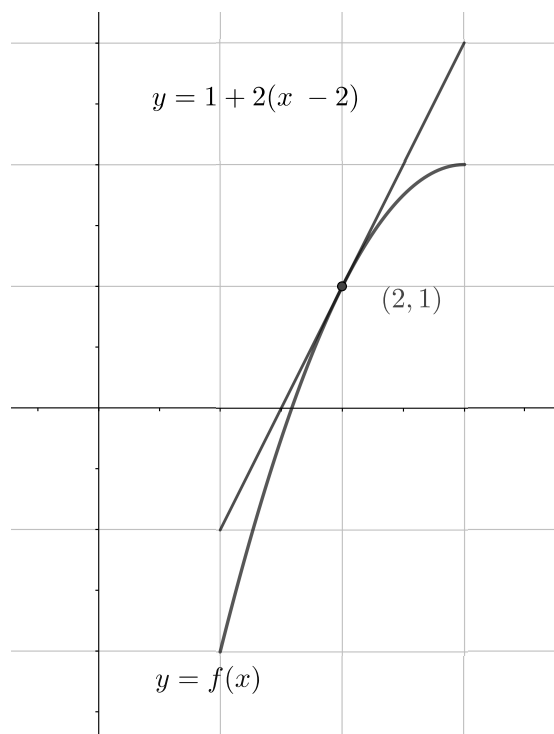
$$\frac{-8}{8} - 4y''(2) - 6 \cdot 2^2 = 0 \implies -25 = 4y''(2) \implies y''(2) = -\frac{25}{4}$$

Luego la ecuación del polinomio de Taylor de orden 2 será: $y = P_2(x) = 1 + 2(x - 2) - \frac{25}{8}(x - 2)^2$.

c) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f , cerca del punto $x = 2$, será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

Por otro lado, utilizando la recta tangente en $x = 2$, tenemos que: $f(1,9) \approx 1 + 2(1,9 - 2) = 0,8$.

Por otro lado, $f(1,9) < 1,8$ pues $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 2$.



(3) Sea $C(x) = C_0 + 2x + x^2$ la función de costes y $p(x) = A - 2x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $A, C_0 > 0$. Se pide:

- (a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 8$, calcular el valor de los parámetros A, C_0 .
- (b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio es $x^{**} = 8$, calcular el valor de los parámetros A, C_0 .

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

- a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (A - 2x)x - (C_0 + 2x + x^2) = -3x^2 + (A - 2)x - C_0$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B :

$$B'(x) = -6x + A - 2, \quad B''(x) = -6 < 0$$

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \frac{A-2}{6}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

Luego $x^* = 8 = \frac{A-2}{6} \implies A = 50$; C_0 puede tomar cualquier valor.

- b) Como la función de coste medio es $\frac{C(x)}{x} = x + 2 + \frac{C_0}{x}$,

su derivada será: $(\frac{C(x)}{x})' = 1 - \frac{C_0}{x^2} = 0 \iff x^2 = C_0$.

Como $(\frac{C(x)}{x})'' = \frac{2C_0}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.

Luego $x^{**} = 8 \implies C_0 = 64$; A puede tomar cualquier valor.

(4) Sea $f(x) = x^3 - 6x$. Se pide:

- (a) Enunciar el teorema de Bolzano de los ceros para una función g definida en $[a, b]$.
- (b) Hallar los ceros o raíces de $f(x)$, así como los intervalos donde $f(x)$ presenta signo positivo o negativo.
- (c) Determinar para que valores a, b la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las hipótesis de dicho teorema. Determinar para que valores a, b la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ NO cumple las hipótesis, pero SI la tesis (o conclusión) de dicho teorema.

0,2 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

a) .

b) Obviamente, $f(x) = x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$, así que las raíces son $0, \sqrt{6}$ y $-\sqrt{6}$.

Teniendo en cuenta que $-3 < -\sqrt{6} < -1 < 0 < 1 < \sqrt{6} < 3$,

y que $f(-3) < 0 < f(-1)$ y $f(1) < 0 < f(3)$, se deduce que:

i) $f(x) < 0$ cuando $x \in (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, \sqrt{6})$.

ii) $f(x) > 0$ cuando $x \in (-\sqrt{6}, 0) \cup (\sqrt{6}, \infty)$.

.

c) Por los datos anteriores, la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano cuando sucede uno de los cuatro casos siguientes:

i) $a < -\sqrt{6} < b < 0$

ii) $a < -\sqrt{6}, \sqrt{6} < b$

iii) $-\sqrt{6} < a < 0 < b < \sqrt{6}$

iv) $0 < a < \sqrt{6} < b$.

Por otro lado, la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cumple la tesis del teorema de Bolzano,

aunque no las hipótesis, cuando sucede uno de los dos casos siguientes:

i) $a < -\sqrt{6}, 0 < b < \sqrt{6}$

ii) $-\sqrt{6} < a < 0, \sqrt{6} < b$

La gráfica de la función puede ayudar a ver este resultado.

