Universidad Carlos III de Madrid

Exercise	1	2	3	4	Total
Points					

Departmento de Economía **Introducción a las Matematicas para la Economía**

Examen Final 25 junio 2021 **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \ln(ex - x^2)$. **Se pide:**

(a) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

(b) Hallar los extremos locales y globales y la imagen de $f(x)$.
Representar la gráfica de la función.

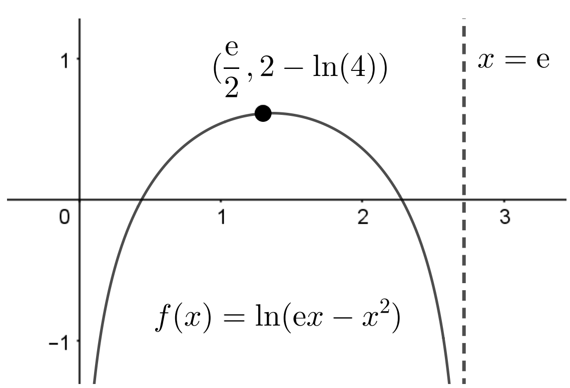
(c) Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo donde $f(x)$ es creciente.
Representar la gráfica de la inversa de $f_1(x)$.
Sugerencia para las representaciones: utilizar que $1 < \ln 4 < 2$.
0,6 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

---

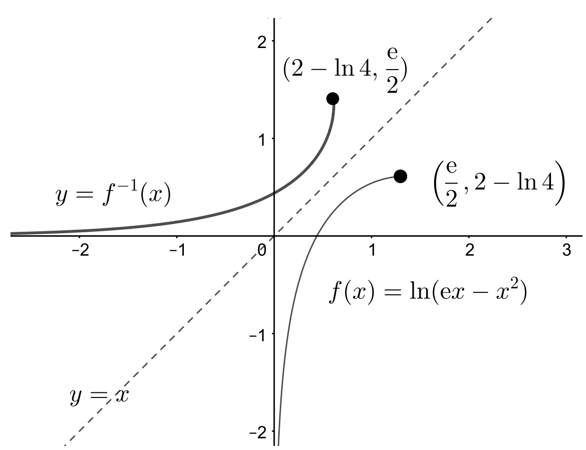
a) El dominio de la función anterior es $(0, e)$.
Como f es continua en su dominio, un conjunto acotado, solo hay que estudiar las asíntotas en 0 y en e :
i) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow e^-} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$.
Luego $f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 0$ y en $x = e$.
Por otro lado, como $f\,'(x) = \dfrac{e - 2x}{ex - x^2}$, se deduce que f es creciente $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow f\,'(x) > 0 \Longleftrightarrow e - 2x > 0$;
luego f es creciente en $(0, \frac{e}{2}]$. Análogamente, f es decreciente en $[\frac{e}{2}, e)$.

b) De lo anterior se deduce que no existen minimizadores, ni locales ni globales y que $x = \frac{e}{2}$ es el único maximizador local y global.
Finalmente, como $f(\frac{e}{2}) = \ln(e^2/4) = 2 - \ln 4$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $(-\infty, 2 - \ln 4]$.
Así pues, la gráfica de la función será, aproximadamente, como la figura A.

c) Como se puede apreciar, f_1 es creciente en $(0, \frac{e}{2}]$, $f_1(0^+) = -\infty$, $f_1(\frac{e}{2}) = 2 - \ln 4$,
Luego su función inversa será creciente, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f_1^{-1}(x) = 0^+$, $f_1^{-1}(2 - \ln 4) = \frac{e}{2}$.
Luego su gráfica será, aproximadamente, como la figura B.



(A)



(B)

(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $e^{xy} + x^2 + y^2 = 5$ en un entorno del punto $x = 2, y = 0$, se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 2$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 2, y = 0$.
Calcular, utilizando la recta tangente, el valor aproximado de $f(1,9)$ y de $f(2,1)$.

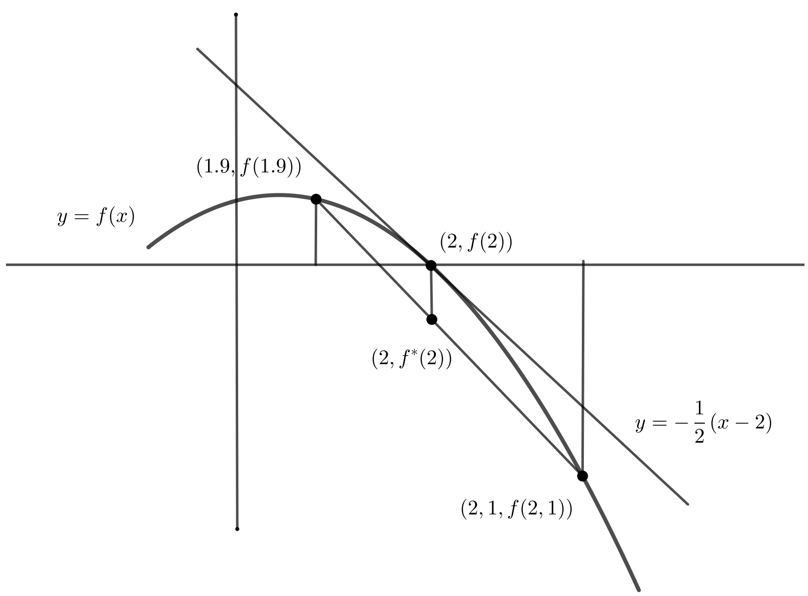
(c) ¿Será $f(2)$ mayor, menor o igual que el valor exacto de $\frac{1}{2}(f(1,9) + f(2,1))$?
Sugerencia para c: utilizar que $f''(2) < 0$.
0,6 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$e^{xy}(y + xy') + 2x + 2yy' = 0$
sustituyendo $x = 2,\ y = 0$ se deduce que $2y' + 4 = 0 \Longrightarrow y'(2) = f\,'(2) = -2$.
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = -2(x - 2)$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$e^{xy}(y + xy')^2 + e^{xy}(2y' + xy'') + 2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$
sustituyendo $x = 2, y = 0, y' = -2$ se deduce que $y''(2) = f(2) = -11$.
Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = -2(x - 2) - \frac{11}{2}(x - 2)^2$

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 2$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.
Por otro lado, utilizando la recta tangente, tenemos que:
$f(1,9) \approx -2(-0,1) = 0,2; f(2,1) \approx -2(0,1) = -0,2$.

c) Finalmente, como la función $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 2$, $\frac{1}{2}(f(1,9) + f(2,1))$ será menor que $f(2) = 0$, como se puede ver por la gráfica o, si se prefiere, calculando aproximadamente por el polinomio de Taylor de orden 2 los valores de $f(1,9)$ y $f(2,1)$);
$\frac{1}{2}(f(1,9) + f(2,1)) \approx -\frac{11}{2} \cdot 0,1^2$
Llamando $f^*(2) = \frac{1}{2}(f(1,9) + f(2,1))$, el dibujo quedaría, aproximadamente, así:



(3) **Sea** $C(x) = \sqrt{5x^2 - 6x + 9}$ **la función de costes de una compañía monopolista, donde** $x \geq 1$ **representa la cantidad en kilogramos de dicho producto. Se pide:**

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a $C(x)$ en $x = 3$, y calcule una aproximación al valor de $C(\ 3,1)$.

(b) Supongamos ahora que la función de demanda inversa es $p(x) = 29 - bx^2$, siendo $b \neq 1, b$ próximo a 1.

Y supongamos también que en el período anterior la empresa produjo 3 unidades.

¿Aumentará o disminuirá en este período la empresa su producción?

0,7 puntos apartado a); 0,8 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar, $C'(x) = \dfrac{10x - 6}{2\sqrt{5x^2 - 6x + 9}}$, luego $C'(3) = \dfrac{24}{2\sqrt{36}} = 2$.

Por otro lado, como $C(3) = 6$, la ecuación de la recta tangente será:

$y = 6 + 2(x - 3)$

Ahora, aproximando $C(3,1)$ por la recta tangente, obtenemos:

$C(3,1) \approx 6 + 2(3,1 - 3) = 6,2$ unidades monetarias.

b) En primer lugar, los beneficios de la empresa serán:

$B(x) = (29 - bx^2)x - C(x)$. Por tanto,

$B'(x) = 29 - 3bx^2 - C'(x) \Longrightarrow B'(3) = 29 - 27b - C'(3) = 27(1 - b)$.

Por tanto, tendríamos dos casos:

i) si $b < 1$, entonces la empresa aumentará su producción.

ii) si $b > 1$, entonces la empresa reducirá su producción.

(4) **Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$. Se pide:**

(a) Enunciar el teorema de Bolzano de los ceros para una función g definida en un intervalo $[a, b]$.

(b) Sea $a = -2$. Determinar b para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de dicho teorema.

(c) Sea $a = -2$. Determinar b para que $f(x)$ cumpla la tesis de dicho teorema.

Sugerencia para b) y c): representar la función.

0,3 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b); 0,7 puntos apartado c).

---

a) El teorema de los ceros afirma que si una función g es continua en el intervalo $[a, b]$,
y si cumple que
i) $g(a) < 0 < g(b)$; o bien
ii) $g(b) < 0 < g(a)$
entonces existe un punto c en (a, b) que cumple $g(c) = 0$.

b) Como $f(-2) > 0$, entonces b debe cumplir que $f(b) < 0$; es decir, $b \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.

c) Hace falta que exista algún cero de dicho polinomio en el intervalo (a, b).
Por tanto, $b \in (-\sqrt{2}, \infty)$.
Observación: como $f(x) = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, se deduce que:
i) $f(x) < 0$ si $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$;
ii) $f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.
Por tanto, la gráfica de f será, aproximadamene, así: