

Hora inicio: 9 horas		Duración: 1 hora 30 minutos.
APELLIDOS:		NOMBRE:
ID:	GRADO:	GRUPO:

(1) Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Se pide:

- Hallar el dominio y asíntotas de la función.
- Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y globales de $f(x)$. Hallar la imagen de $f(x)$ y dibujar su gráfica.

0,4 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b)

a) El dominio de la función anterior es $\mathbb{R}$.

Como f es continua en su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en ∞ y en $-\infty$:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty$, luego f no tiene asíntota ni horizontal ni oblicua en $-\infty$.

Además, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = [\text{por la regla de L'Hopital, aplicada 2 veces}] =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$

Luego $f(x)$ tiene asíntota horizontal $y = 0$ en ∞ .

b) Como $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x)$, se deduce que :

f es creciente $\iff f'(x) > 0 \iff -x^2 + 2x = x(-x + 2) > 0$;

luego f es creciente en $[0, 2]$. Análogamente, f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y en $[2, \infty)$.

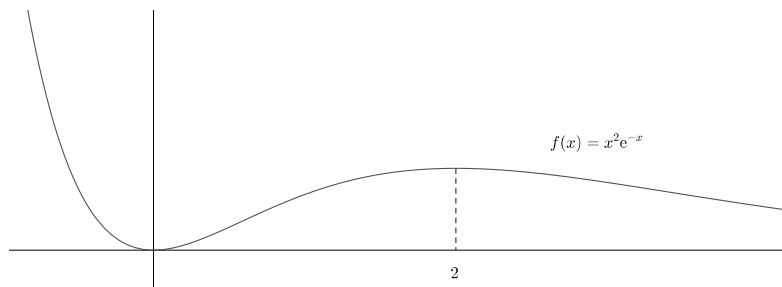
Como f no es nunca negativa y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, de lo anterior se deduce que

2 es un maximizador local y 0 es un minimizador local y global.

Al no haber más puntos críticos, se deduce que no existen otros minimizadores locales ni globales.

Finalmente, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $[0, \infty)$.

Así pues, la gráfica de la función será, aproximadamente, así:



(2) Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $xe^{-y} + 2y = 1$ en un entorno del punto $x = 1, y = 0$, se pide:

- Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 1$.
- Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 1$ y utilizar la recta tangente para obtener una aproximación de los valores de $f(0,9)$ y de $f(1,2)$.

¿Puedes justificar si alguna de dichas aproximaciones es por defecto o por exceso?

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

- a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$$(1 - xy')e^{-y} + 2y' = 0$$

sustituyendo $x = 1, y(1) = 0$ se deduce que:

$$1 - y' + 2y' = 0 \implies y'(1) = f'(1) = -1.$$

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 0 - (x - 1)$; o bien, $y = 1 - x$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

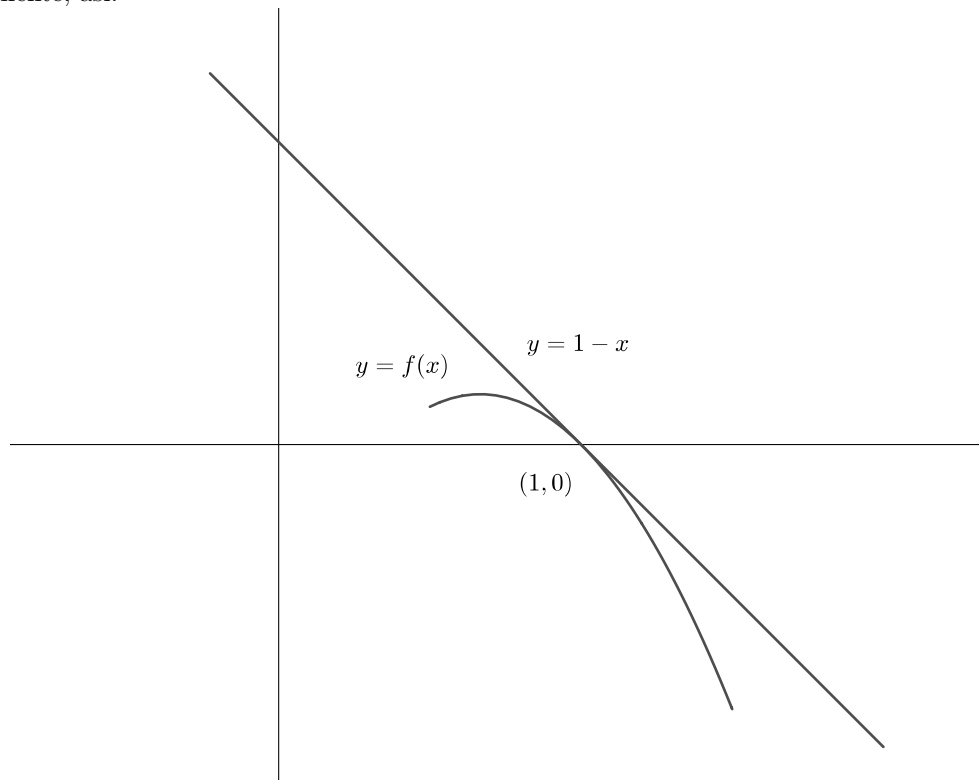
$$[-y' - xy'' + (1 - xy')(-y')]e^{-y} + 2y'' = 0$$

sustituyendo $x = 1, y(1) = 0, y'(1) = -1$ se deduce que:

$$[1 - y'' + 2] + 2y'' = 0 \implies y''(1) = f''(1) = -3$$

Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = 1 - x - \frac{3}{2}(x - 1)^2$

- b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f cerca del punto $x = 1$ será, aproximadamente, así:



Por otro lado, las aproximaciones de primer orden serán:

$$f(0,9) \approx P_1(0,9) = 1 - (0,9) = 0,1; \quad f(1,2) \approx P_1(1,2) = 1 - (1,2) = -0,2.$$

Como la función es cóncava cerca de $x = 1$, pues $f''(1) < 0$, la aproximación de los valores de f por la recta tangente será, en ambos casos, por exceso.

- (3) Sea $C(x) = 100 + 150x + x^2$ la función de costes y $p(x) = 250 - x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, siendo $0 \leq x \leq 50$ el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:

- (a) Determinar el precio p^* y la cantidad x^* en los cuales se alcanza el beneficio máximo.
(b) Si el gobierno aumenta los costes por medio de un impuesto de T euros por unidad producida, determinar la nueva cantidad $x^*(T)$ y el nuevo precio $p^*(T)$ que maximizan el beneficio de la compañía.

Comparar los resultados con el caso anterior.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

- a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (250 - x)x - (100 + 150x + x^2) = -2x^2 + 100x - 100$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B :

$$B'(x) = -4x + 100; B''(x) = -4 < 0$$

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \frac{100}{4} = 25$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

Finalmente, $p^* = p(25) = 250 - 25 = 225$.

- b) Como la nueva función de costes es $C(x) = 100 + (150 + T)x + x^2$,

la nueva función de beneficios será $B(x) = -2x^2 + (100 - T)x + 100$.

Como $B'(x) = -4x + 100 - T$; $B''(x) = -4 < 0$,

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^*(T) = \frac{100 - T}{4} = 25 - \frac{T}{4}$.

Como B es una función cóncava, el punto crítico es el único maximizador global.

Finalmente, $p^*(T) = 250 - (25 - \frac{T}{4}) = 225 + \frac{T}{4}$.

Como se puede ver, la cantidad producida ha disminuido y los precios han aumentado.

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 2ax + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ y consideremos el intervalo $[0, 4]$.

Se pide:

- (a) Determinar a y b para que $f(x)$ satisfaga las hipótesis (o condiciones iniciales) del teorema de Lagrange en dicho intervalo.
- (b) Para aquellos valores a, b hallados en el apartado a), determinar el valor o valores intermedio(s) c de forma que se cumpla la tesis (o conclusión) de dicho teorema.
- Sugerencia para ambos apartados: enunciar el teorema del valor medio (o de Lagrange).

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)

- a) Necesitamos imponer la continuidad y derivabilidad en $x = 2$.

Para ello, como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 3$, $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -4 + 4a + b$

se deduce que la función será continua en dicho punto cuando:

$$2a + 3 = -4 + 4a + b \iff 2a + b = 7.$$

Por otro lado, suponiendo que la función sea continua en $x = 2$,

será derivable en dicho punto si

$$a = f'_-(2) = f'_+(2) = -4 + 2a \iff a = 4.$$

Luego la función será continua y derivable en $x = 2$ cuando $a = 4, b = -1$.

- b) Por el teorema del valor medio sabemos que:

Existe $c \in (0, 4) : f(4) - f(0) = f'(c)(4 - 0)$.

Teniendo en cuenta que $a = 4, b = -1$, lo anterior equivale a que

$$(-16 + 32 - 1) - (3) = 12 = 4f'(c). \text{ O bien: } f'(c) = 3.$$

Cuando $x \leq 2$, $f'(x) = a = 4 \neq 3$, luego no es posible que $c \leq 2$.

$$\text{Cuando } x > 2, f'(x) = -2x + 2a = -2x + 8 = 3 \iff x = \frac{5}{2}.$$

Luego solo es posible cuando $c = \frac{5}{2}$.