Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos					

Departamento de Economía **Introducción a Matemáticas Examen Final** **11 enero 2024**

Duración: 1 hora y 35 min.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea $p(x) = 13 - \beta x$ la función inversa de la demanda y $C(x) = 16 + x + x^2$ la función de costes de una empresa monopolística, con $\beta > 0$.**

(a) Calcular el valor de β tal que los beneficios de la firma se maximizan en un nivel de producción $x^* = 3$.

(b) Demostrar que el valor mínimo del coste medio se alcanza en un nivel de producción $\widetilde{x}$ mayor.

(c) Si el regulador del mercado obliga a la empresa a producir a su coste medio mínimo, ¿cuál será la compensación que exigirá la empresa con el valor de β obtenido en el apartado (a)?

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c).

(a) La función de beneficio $B(x) = (13 - \beta x)x - 16 - x - x^2$. Por lo tanto $B'(x) = 13 - 2\beta x - 1 - 2x = 12 - 2(\beta + 1)x$ y $B''(x) = -2(\beta + 1) < 0$, es decir, $B(x)$ es una función cóncava.
Entonces, para que $x^* = 3$ sea solución de $B'(x) = 0$, se cumple, $12 - 2(\beta + 1)3 = 0 \Longrightarrow \beta = 1$.

(b) Como $C(x) = 16 + x + x^2$, la función de coste medio es $AC(x) = \frac{16}{x} + 1 + x$, con $AC'(x) = -\frac{16}{x^2} + 1$ y $AC''(x) = \frac{32}{x^3} > 0$, es decir, AC es una función convexa.
Entonces, $\widetilde{x}$ tal que $AC'(\widetilde{x}) = 0$ minimiza el coste medio de la empresa es: $\widetilde{x} = 4 > x^* = 3$

(c) Sustituyendo $x^* = 3$ y $\beta = 1$ en los beneficios, obtenemos $B^* = 2$. Sustituyendo $\widetilde{x} = 4$ y $\beta = 1$ en los beneficios, obtenemos $\widetilde{B} = 0$.
Por lo tanto la compensación que deberá exigir la empresa al regulador sería, por lo menos de 2 unidades monetarias.

(2) **Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $2xy - e^y + x^2 = 0$ en un entorno del punto $x = 1$, $y = 0$, se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $a = 1$.

(b) Representar, aproximadamente, la gráfica de f cerca del punto $x = 1$.

(c) Representar, aproximadamente, la inversa de dicha función.

Sugerencia para b y c: utilizar que $f'(1) < 0$, $f''(1) > 0$.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

(a) Antes de nada, observamos que el punto $(1, 0)$ satisface la ecuación.

Además, derivando la ecuación respecto de la variable y, se obtiene: $2x - e^y$ que vale, en el punto $x = 1, y = 0 : 2 - 1 \neq 0$ luego la ecuación determina, en efecto, $y = f(x)$ cerca del punto $x = 1, y = 0$. A continuación, en primer lugar, calculamos la derivada primera de la función: $2y + 2xy' - y'e^y + 2x = 0$ sustituyendo $x = 1,\ y(1) = 0$ se deduce que $y'(1) = f'(1) = -2$.

Luego la ecuación de la recta tangente sería: $y = P_1(x) = 0 - 2(x - 1)$.

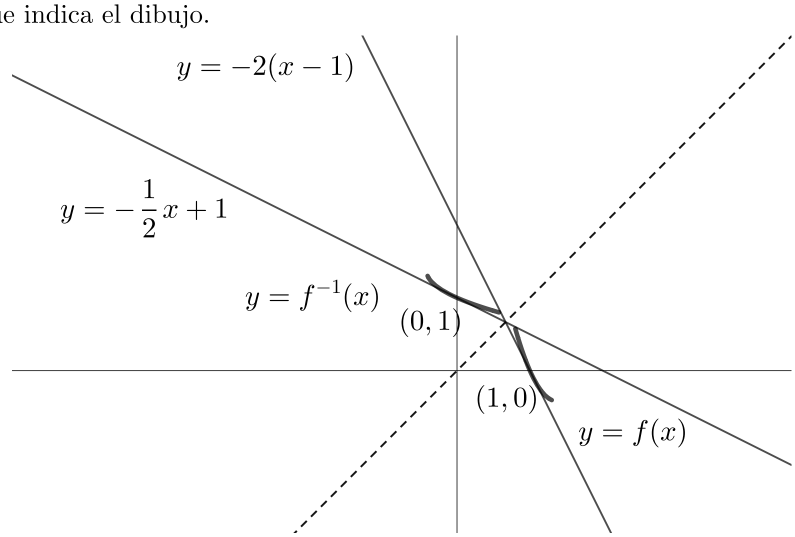
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función: $2y' + 2y' + 2xy'' - y''e^y - (y')^2e^y + 2 = 0$ sustituyendo $x = 1, y(1) = 0, y'(1) = -2$ se deduce que $y''(1) = f''(1) = 10$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor sería: $y = P_2(x) = 0 - 2(x - 1) + 5(x - 1)^2$

(b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f cerca del punto $x = 1$ sería, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

(c) La gráfica de la inversa de la función $f^{-1}(x)$ existirá en un entorno del punto $(0, 1)$.

Por simetría respecto a la diagonal principal, la recta tangente a dicha inversa que pasa por el punto $(0, 1)$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y, por tanto, la gráfica de $f^{-1}(x)$ vendría dada, aproximadamente, de la forma que indica el dibujo.



(3) **Sea la función $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$, definida en $(0, \infty)$. Se pide:**

(a) Hallar las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos globales de $f(x)$.

(b) Hallar la imagen y representar la gráfica de la función.

(c) Enunciar en primer lugar el teorema de Weierstrass. A continuación, considerar $f_b(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[b, \infty)$, donde $b > 0$.

Discutir para que valores de b se cumple la tesis (o conclusión) del teorema de Weierstrass.

0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c)

(a) Para empezar, como $f(x)$ es continua en todo su dominio, solo hay que calcular las asíntotas en 0 y en ∞.

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{-\infty}{0+} = -\infty$, luego $f(x)$ tiene una asíntota vertical en 0.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ =(aplicando L'Hopital) $= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{x^{-2/3}/3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^{1/3}} = 0$

luego $f(x)$ tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.

Y como

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x^{1/3} - (\ln x)x^{-2/3}/3}{x^{2/3}} = \frac{3x^{-2/3} - (\ln x)x^{-2/3}}{3x^{2/3}} = \frac{3 - \ln x}{3x^{4/3}},$$

el único punto crítico es $x = e^3$.

$f'(1) > 0$, luego $f'(x) > 0$ si $x \in (0, e^3)$, luego $f(x)$ es creciente en $(0, e^3]$.

$f'(e^4) < 0$, luego $f'(x) < 0$ si $x \in (e^3, \infty)$, luego $f(x)$ es decreciente en $[e^3, \infty)$.

Obviamente $x = e^3$ es el maximizador global de $f(x)$.

Por otro lado, $f(x)$ no tiene mínimo global.

(b) Por lo anterior, el valor máximo sería $f(e^3) = \frac{3}{e}$. De ahí y de que $\lim_{x\longrightarrow 0+} f(x) = -\infty$ se deduce que la imagen de $f(x)$ sería $(-\infty, \frac{3}{e}]$, por el teorema de los valores intermedios para funciones continuas.

Así pues, la gráfica de la función quedaría como se puede ver al final.

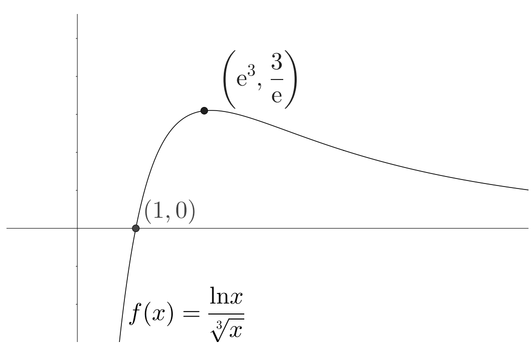
(c) Como hemos visto, $f(x)$ es creciente en $(0, e^3]$ y decreciente en $[e^3, \infty)$.

Por otro lado, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0^+$. Luego siempre que $y = 0$ esté en la imagen de $f_b(x)$ se cumplirá el teorema de Weierstrass. Teniendo en cuenta que $f(1) = 0$, esto nos da dos casos:

i) si $b \leq 1 \Longrightarrow \min(f_b) = f(b)$, $\max(f_b) = \frac{3}{e}$, luego se cumple el teorema de Weierstrass.

ii) si $b > 1 \Longrightarrow \min(f_b)$ no existe, luego no se cumple el teorema de Weierstrass.

Ver, de nuevo, la gráfica de la función.



(4) Sea $f(x) = \begin{cases} e^{a(x-1)} & , x \leq 1 \\ \frac{b}{2x} & , x > 1 \end{cases}$ definida a trozos en $\mathbb{R}$ donde $a < 0$, $b > 0$ Se pide:

(a) Enunciar el teorema del valor medio (o de Lagrange) para una función definida en $[0, 2]$.

(b) Para que valores de a, b se cumplen las hipótesis del citado teorema para dicha función f definida en $[0, 2]$.

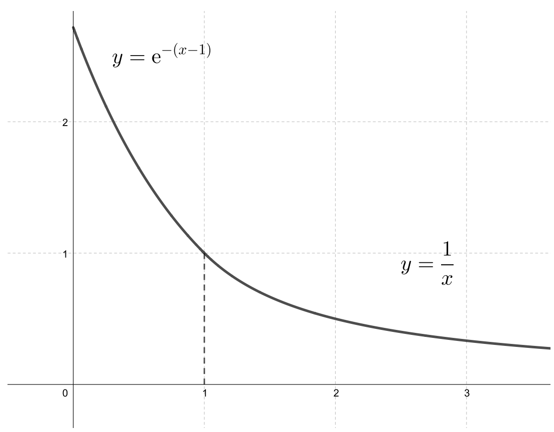
(c) Supongamos que $a = -\ln 2$, $b = 2$. ¿Se cumple la tesis (o conclusión) del citado teorema para dicha función f definida en $[0, 2]$?

Sugerencia para c: para hallar el punto c de la conclusión, empezar por buscar en el intervalo $(1, 2)$.

0,2 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b) ; 0,2 puntos apartado c)

(a) Las hipótesis son que f sea continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.
La tesis, o conclusión, es que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = (f(2) - f(0))/2$.

(b) Para ello, necesitamos, en primer lugar, imponer la continuidad de f en $x = 1$.
$\lim_{x \to -1+} f(x) = b/2 = f(1) = \lim_{x \to -1-} f(x) = 1$
Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$ cuando $b = 2$.
Por otro lado, suponiendo f continua en $x = 1$, la función sería derivable en $x = 1$ cuando:
$f'(1^+) = f'(1^-)$. Y ahora tenemos que:
i)$f'(1^+) = \lim_{x \to 1+} f'(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{-b}{2x^2} = \frac{-b}{2} = -1$;
ii) $f'(1^-) = a$, pues $f'(x) = ae^{a(x-1)}$
Luego se satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange cuando:
$b = 2$, $a = -1$.



(c) La tesis, o conclusión, es que existe $c \in (0, 2)$ tal que $2f'(c) = f(2) - f(0)$, es decir:
i) si $c > 1, -2/c^2 = 1/2 - \mathrm{e}^{\ln 2} = 1/2 - 2 = -3/2$.
por lo tanto, $c^2 = 4/3 > 1 \Longrightarrow c = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$. Luego se cumple la tesis del teorema.
ii) El caso $c \leq 1$, por tanto, no hace falta estudiarlo.