

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos						

Duración: 1 hora 30 minutos.

APELLIDOS:	NOMBRE:
ID:	GRUPO:

(1) Sea la función $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, definida en el intervalo $(0, \infty)$. Se pide:

- Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- Hallar los extremos locales y globales y la imagen de $f(x)$. Representar la gráfica de la función.
- Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[1, \infty)$.

Representar la gráfica de la inversa de $f_1(x)$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

a) El dominio de la función anterior es $(0, \infty)$.

Como f es continua en su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en 0 por la derecha y en $+\infty$:

i) haciendo el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ (de esta forma $x \rightarrow 0^+$ cuando $t \rightarrow +\infty$) obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{t} = \frac{\infty}{\infty} = [\text{por la regla de L'Hopital}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{1} = \infty$$

Luego $f(x)$ tiene asíntota vertical $x = 0$ por la derecha.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \\ &= \frac{0}{0} = [\text{por la regla de L'Hopital}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-1/x^2)}{(-1/x^2)} = 1. \end{aligned}$$

Luego $f(x)$ tiene asíntota oblicua $y = x + 1$ en ∞ .

Por último, como $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$, se deduce por el signo de $f'(x)$ que f es creciente en $[1, \infty)$, pues $f'(x) > 0$ en dicho intervalo. Análogamente, f es decreciente en $(0, 1]$ al ser $f'(x) < 0$.

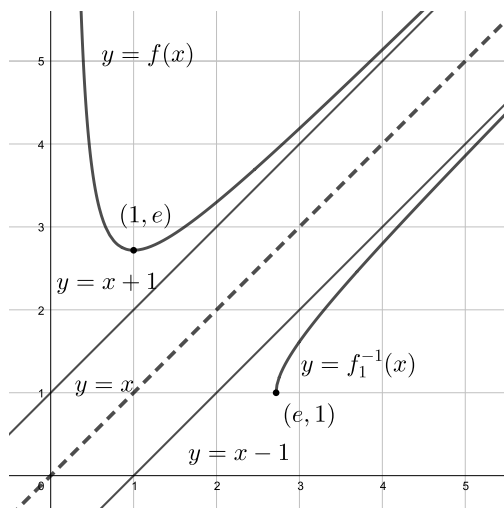
b) De lo anterior se deduce que el punto 1 es un minimizador local y global. Además, al no existir maximizador local, no lo puede haber global.

Por otro lado, como f es decreciente en $(0, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen de la función en intervalo $(0, \infty)$ será $[f(1), \infty) = [e, \infty)$.

Así pues, la gráfica de la función quedará, aproximadamente, como muestra la figura al final.

c) Como se puede apreciar, f_1 es creciente en $[1, \infty)$, $f_1(1) = e$ y $f_1(x)$ tiene como asíntota oblicua $y = x + 1$.

Luego su inversa será creciente en $[e, \infty)$, tomará el valor 1 en el punto e , tendrá como asíntota oblicua la recta $y = x - 1$ y su gráfica será, aproximadamente, como muestra la siguiente figura:



(2) Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación

$$-3x + 3y + e^{-x} + e^y = 2$$

en un entorno del punto $x = 0, y = 0$, se pide:

- (a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $a = 0$.
- (b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 0$.
- (c) Calcular aproximadamente, utilizando el polinomio de Taylor, $f(-0,1)$ y $f(0,1)$.
¿Será $f(0)$ mayor, menor o igual que el valor de $\frac{1}{2}(f(-0,1) + f(0,1))$?
Sugerencia para b y c: utilizar que $f''(0) < 0$.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

- a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$$-3 + 3y' - e^{-x} + y'e^y = 0$$

sustituyendo $x = 0, y(0) = 0$ se deduce que $y'(0) = f'(0) = 1$.

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = x$.

Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$$3y'' + e^{-x} + y''e^y + (y')^2e^y = 0$$

sustituyendo $x = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$ se deduce que $y''(0) = f''(0) = -1/2$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = x - \frac{1}{4}x^2$.

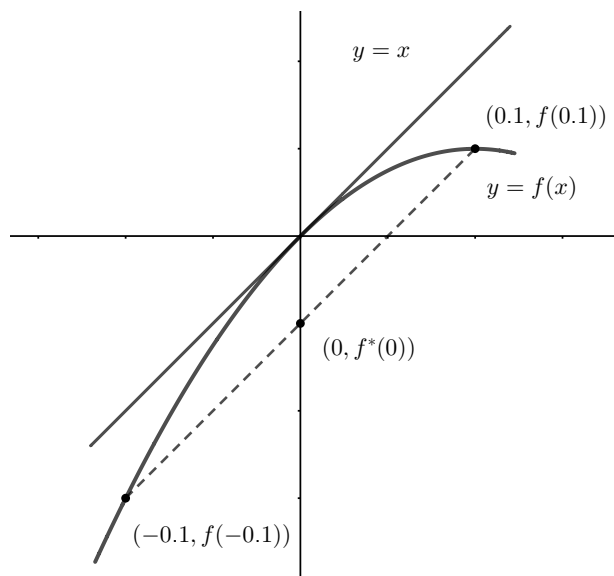
- b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f , cerca del punto $x = 0$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

- c) Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor, tenemos que:

$$f(-0,1) \approx -0,1 - \frac{1}{4}(-0,1)^2 = -0,1025; \quad f(0,1) \approx 0,1 - \frac{1}{4}(0,1)^2 = 0,0975 \implies \frac{1}{2}(f(-0,1) + f(0,1)) \approx -\frac{1}{4}(0,1)^2 \approx -0,0025$$

Luego $\frac{1}{2}(f(-0,1) + f(0,1))$ es menor que $f(0) = 0$. O si se prefiere, se puede ver gráficamente, utilizando que la función $f(x)$ es cóncava cerca del punto $x = 0$.

Llamando $f^*(0) = \frac{1}{2}(f(-0,1) + f(0,1))$, el dibujo quedaría así:



(3) Sea $C(x) = 36 + 16x + ax^2$ la función de costes y $p(x) = 76 - x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $a > 0$. Se pide:

- (a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 6$, calcular el valor del parámetro a .
- (b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio es $x^* = 6$, calcular el valor del parámetro a .

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

- a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (76 - x)x - (36 + 16x + ax^2) = -(a + 1)x^2 + 60x - 36$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B :

$$B'(x) = -2(a + 1)x + 60; B''(x) = -2(a + 1) < 0$$

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \frac{60}{2(a + 1)}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

$$\text{Luego } x^* = 6 = \frac{60}{2(a + 1)} \implies a + 1 = 5 \implies a = 4$$

- b) Como la función de costes medios es $\frac{C(x)}{x} = \frac{36}{x} + 16 + ax$,

$$\text{su derivada será: } \left(\frac{C(x)}{x} \right)' = -\frac{36}{x^2} + a = 0 \iff x^2 = \frac{36}{a}.$$

Como $\left(\frac{C(x)}{x} \right)'' = \frac{72}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.

$$\text{Luego } x^* = 6 = \frac{6}{\sqrt{a}} \implies a = 1$$

(4) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & , x \leq 1 \\ bx^2 + 2x + 1 & , x > 1 \end{cases}$$

definida a trozos en el intervalo $[0, 2]$. **Se pide:**

- (a) Enunciar el teorema de Bolzano de los ceros para una función f cualquiera definida en $[0, 2]$.
Determinar qué condiciones han de cumplir a y b para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de dicho teorema.
¿Se cumplen las hipótesis (o punto de partida) del teorema para algún $b < 0$?
- (b) Enunciar el teorema del valor medio (de Lagrange) para una función f cualquiera definida en $[0, 2]$.
Hallar a, b para que se satisfagan las hipótesis del teorema.
Para dichos valores a, b , hallar el/los punto(s) c que satisfacen la tesis de dicho teorema.
- 0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b)**

- a) Las hipótesis son que f sea continua en $[0, 2]$ y que, además, $f(0) \cdot f(2) < 0$.

La tesis, o conclusión, es que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Para ello, necesitamos, en primer lugar, imponer la continuidad de f en $x = 1$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -1 + a$ y como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b + 3$, se deduce que la función será continua en $[0, 2]$ cuando: $a = b + 4$ o, si se prefiere, $b = a - 4$.

Por otro lado, suponiendo f continua, la condición $f(0) \cdot f(2) < 0$ se cumplirá cuando:

i) $f(0) = a < 0$ y $f(2) = 4b + 5 > 0$; o bien

ii) $f(0) = a > 0$, $f(2) = 4b + 5 < 0$.

Así pues, en el primer caso si $a < 0$ (o $b < -4$ al ser $b = a - 4$), tenemos $f(2) = 4b + 5 > 0 \implies b > -\frac{5}{4}$ lo cual es imposible y no se cumple la condición i) en ningún caso.

Por otro lado, si $a > 0$ (o $b > -4$ al ser $b = a - 4$), tenemos $f(2) = 4b + 5 < 0 \implies b < -\frac{5}{4}$ y obtenemos la solución: $-4 < b < -\frac{5}{4}$ o $0 < a < \frac{11}{4}$ para que se cumplan las condiciones del teorema en el caso ii).

- b) Las hipótesis son que f sea continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

La tesis, o conclusión, es que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

Hemos vistos que la función será continua en $[0, 2]$ cuando: $a = b + 4$.

Necesitamos ahora, suponiendo la continuidad de f , imponer su derivabilidad en $x = 1$.

Como $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & , x < 1 \\ 2bx + 2 & , x > 1 \end{cases}$ se cumple que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2b + 2$

Ahora, suponiendo la continuidad de $f'(x)$ en $x = 1$ si $2b + 2 = 0$. Luego se cumplen las hipótesis de este teorema cuando $b = -1$, $a = 3$. Por tanto, el punto c debe cumplir que $f(2) - f(0) = -2 = 2f'(c)$. Obviamente, $c \neq 1$; y entonces:

i) si $c < 1$: $2c - 2 = -1 \implies c = \frac{1}{2}$

i) si $c > 1$: $-2c + 2 = -1 \implies c = \frac{3}{2}$

La situación se puede ver en el dibujo.

