

Ejercicio	1	2	3	4	Total
Puntos					

APELLIDOS:		NOMBRE:	
ID:	GRADO:	GRUPO:	

(1) Sea la función $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$. Se pide:

- (a) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- (b) Hallar los extremos globales y la imagen de $f(x)$. Representar la gráfica de la función.
- (c) Considerar $f_1(x)$ la función $f(x)$ restringida al intervalo $[-1, 1]$. Representar la gráfica de la inversa de $f_1(x)$.
(Sugerencia para (c): no intentar hallar explícitamente una fórmula para la inversa de f_1)
0,6 puntos apartado a); 0,6 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c)

(a) El dominio de la función anterior es \mathbb{R} .

Como f es continua en su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en ∞ y en $-\infty$:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1)^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = [\text{por la regla de L'Hopital, aplicada 2 veces}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$. Luego $f(x)$ tiene asíntota horizontal $y = 0$ en ∞ .

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + 1)^2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = -\infty$, luego f no tiene asíntota ni horizontal ni oblicua en $-\infty$.

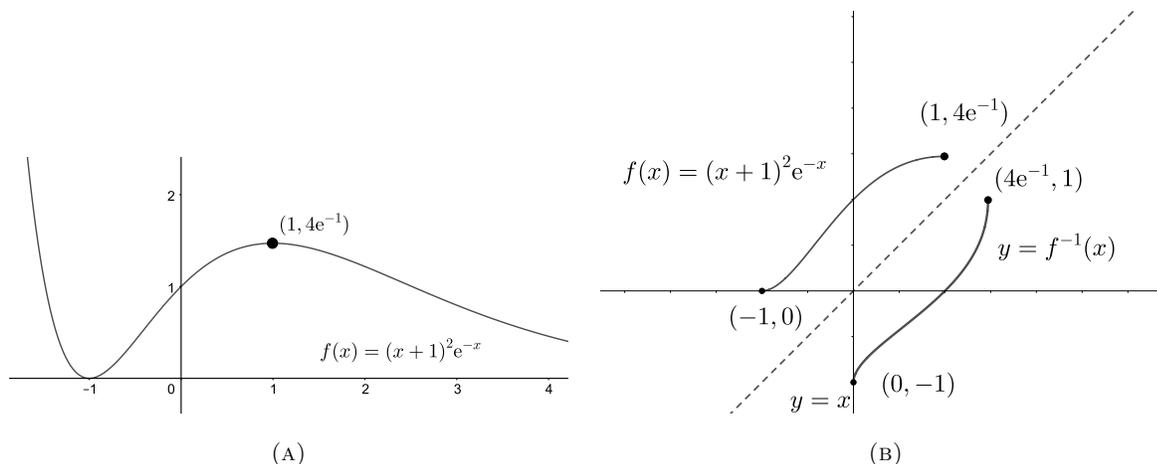
Como $f'(x) = e^{-x}(1 - x^2)$, se deduce que f es creciente $\iff f'(x) > 0 \iff 1 - x^2 > 0$; luego f es creciente en $[-1, 1]$. Análogamente, f es decreciente en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$.

(b) De lo anterior se deduce que -1 es un minimizador local y 1 es un maximizador local. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, se deduce que no existen maximizadores globales. Como $f(-1) = 0$ y $f(x) > 0$ (si $x \neq -1$), se deduce que 0 es el único minimizador global.

Finalmente, como $f(-1) = 0, f(x) \geq 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $[0, \infty)$.

Así pues, la gráfica de la función será, aproximadamente, como en la figura A.

(c) Como se puede apreciar, f_1 es creciente en $[-1, 1]$, $f_1(-1) = 0, f_1(1) = 4/e$. Luego la gráfica de su inversa será, aproximadamente, como en la figura B:



(2) Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación $e^x + ye^y = 2e$ en un entorno del punto $x = 1, y = 1$, se pide:

- (a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en $a = 1$.
 (b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 1, y = 1$.

Calcular, utilizando la recta tangente, el valor aproximado de $f(0,9)$ y de $f(1,1)$.

¿Será $f(1)$ mayor, menor, o igual que el valor exacto de $\frac{1}{2}(f(0,9) + f(1,1))$?

Sugerencia para b: utilizar que $f''(1) < 0$.

0,8 puntos apartado a); 0,7 puntos apartado b)

- (a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

$$e^x + y'e^y + yy'e^y = e^x + y'(y+1)e^y = 0$$

sustituyendo $x = 1, y(1) = 1$ se deduce que $y'(1) = f'(1) = -1/2$.

Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$. Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$$e^x + y''(y+1)e^y + (y')^2e^y + y'(y+1)y'e^y = 0$$

sustituyendo $x = 1, y(1) = 1, y'(1) = -1/2$ se deduce que $y''(1) = f''(1) = -7/8$.

Luego la ecuación del polinomio de Taylor de orden 2 será: $y = P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{7}{16}(x - 1)^2$

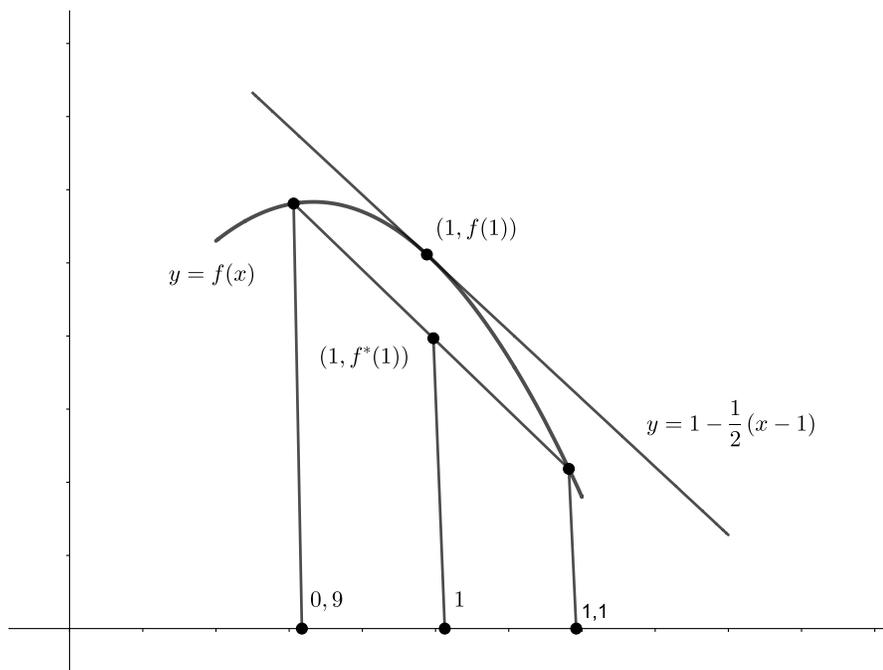
- (b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f , cerca del punto $x = 1$ será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

Por otro lado, utilizando la recta tangente, tenemos que:

$$f(1,1) \approx 1 - \frac{1}{2}(0,1) = 0,95; f(0,9) \approx 1 - \frac{1}{2}(-0,1) = 1,05.$$

Finalmente, como la función $f(x)$ es cóncava, $\frac{1}{2}(f(0,9) + f(1,1))$ será menor que $f(1)$, como se puede ver por la gráfica o, si se prefiere, calculando aproximadamente por el polinomio de Taylor de orden 2: $\frac{1}{2}(f(0,9) + f(1,1)) \approx 1 - \frac{7}{16}0,01$

Llamando $f^*(1) = \frac{1}{2}(f(0,9) + f(1,1))$, el dibujo quedaría así:



(3) Sea $C(x) = C_0 + 50x + \frac{1}{2}x^2$ la función de costes y $p(x) = 710 - 5x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista. Se pide:

- (a) Determinar el precio p^* y la cantidad x^* en los cuales se alcanza el beneficio máximo.
- (b) Hallar C_0 de modo que la cantidad obtenida en el apartado a) sea la misma que minimiza los costes medios.

0,6 puntos apartado a); 0,9 puntos apartado b)

(a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.

$$B(x) = (710 - 5x)x - (C_0 + 50x + \frac{1}{2}x^2) = -\frac{11}{2}x^2 + 660x - C_0$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B :

$$B'(x) = -11x + 660; B''(x) = -11 < 0$$

luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \frac{660}{11} = 60$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

Finalmente, $p^* = p(60) = 710 - 300 = 410$

(b) Como la función de costes medios es $\frac{C(x)}{x} = \frac{C_0}{x} + 50 + \frac{1}{2}x$,

su derivada será: $\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = -\frac{C_0}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \iff x^2 = 2C_0$.

Como $\left(\frac{C(x)}{x}\right)'' = \frac{2C_0}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.

Luego si $x^* = 60$ debe ser el minimizador, se cumplirá que

$$60 = x^* = \sqrt{2C_0} \implies C_0 = 1800$$

(4) Sea $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2, & x < 2 \\ b, & x = 2 \\ -x^2 + 6x + 1, & x > 2 \end{cases}$ definida a trozos en el intervalo $[1, 3]$. Se pide:

- (a) Enunciar el teorema de Weierstrass para una función g definida en un intervalo I .
Determinar a y b para que $f(x)$ cumpla las hipótesis de dicho teorema.
- (b) Supongamos que $a = -1$. ¿Para qué valores de b se cumple la tesis (o conclusión) de este teorema para el intervalo $[1, 3]$?
¿Y para los intervalos $[1, 2]$ o $[2, 3]$?

0,6 puntos apartado a); 0,9 puntos apartado b)

- (a) Las hipótesis son que g sea continua en un intervalo I cerrado y acotado.

La tesis, o conclusión, es que dicha función alcanzará un máximo y un mínimo.

Para ello, necesitamos imponer la continuidad de f en $x = 2$.

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -4 + 12 + 1 = b = f(2) \implies b = 9.$$

$$\text{Y como } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2+a)^2 = 9 = f(2) \implies a = -5 \text{ o } a = 1.$$

Por tanto, se deduce que la función será continua en $[1, 3]$ cuando: $b = 9$ y ($a = -5$ o $a = 1$).

- (b) Para $a = -1$ no se cumplen las hipótesis de este teorema para el intervalo $[1, 3]$.

Ahora bien, puede que sí se cumpla la conclusión en dicho intervalo, según los valores de b .

Observemos que f es creciente en $[1, 2)$ y creciente en $(2, 3]$, y que:

$$0 = f(1) < \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 < 9 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) < f(3) = 10.$$

Veamos los tres posibles casos según los valores que podría tomar b :

i) $b \leq 0 \implies \min f = b, \max f = 10.$

ii) $0 \leq b \leq 10 \implies \min f = 0, \max f = 10.$

iii) $10 \leq b \implies \min f = 0, \max f = b.$

Luego para cualquier valor real de b se cumple el teorema de Weierstrass.

Ahora bien, para el caso del intervalo $[1, 2]$ solo se cumple si $b \geq 1$, en cuyo caso $\min f = 0, \max f = b$ pues, si $b < 1$ el máximo no existe, como se puede ver en el dibujo inferior, a la izquierda.

Análogamente, para el caso del intervalo $[2, 3]$ solo se cumple si $b \leq 9$, en cuyo caso $\min f = b, \max f = 10$ pues, si $b > 9$ el mínimo no existe, como se puede ver en el dibujo inferior, a la derecha.

