$\boxed{1}$

Se considera la función $f(x) = x^3e^{-x}$.

(a) (5 puntos) Hallar el dominio y asíntotas de la función f.

(b) (10 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos locales y globales de f. Hallar la imagen de f y dibujar su gráfica.

Solución:

(a) Como f es continua en su dominio, solo hay que estudiar las asíntotas en ∞ y en $-\infty$:

i) $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^2e^{-x} = \infty$, luego f no tiene asíntota ni horizontal ni oblicua en $-\infty$.

ii) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} =$ [por la regla de L'Hopital, aplicada 3 veces] $= \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{6}{e^x} = \dfrac{6}{\infty} = 0$.

Luego $f(x)$ tiene asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.

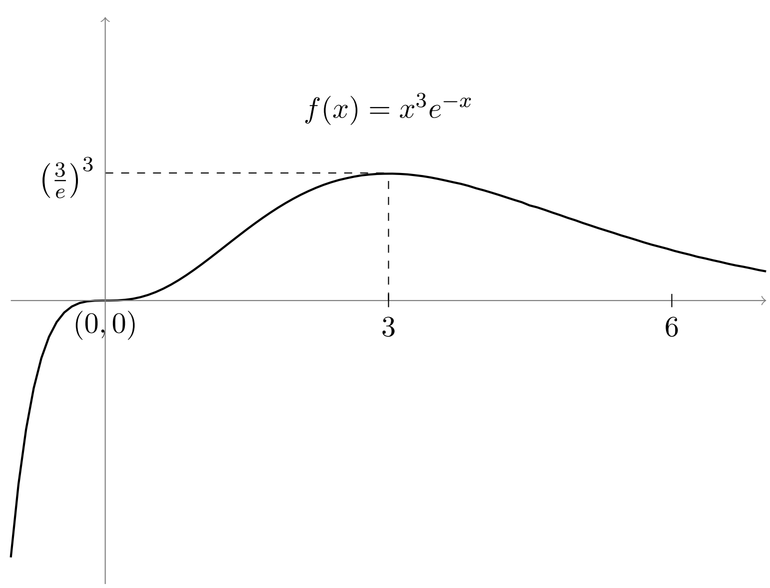
(b) Como $f'(x) = e^{-x}(-x^3 + 3x^2)$, se deduce que:

f es creciente $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2 = x^2(-x+3) > 0$; luego f es creciente en $(-\infty, 3]$.Análogamente, f es decreciente en $[3, \infty)$.

De lo anterior se deduce que 3 es un maximizador local y global. Al no haber más puntos críticos, se deduce que no existen minimizadores locales ni globales.

Finalmente, como $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\infty$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $(-\infty, f(3)] = (-\infty, 27e^{-3}]$.

Así pues, la gráfica de la función será, aproximadamente, así:



$\boxed{2}$

Dada la función $y = f(x)$, definida de forma implícita mediante la ecuación

$$xe^y + ye^x = 2e$$

en un entorno del punto $x = 1, y = 1$, se pide:

(a) (8 puntos) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de grado 2 de la función centrado en el punto $a = 1$.

(b) (7 puntos) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 1$ y utilizar la recta tangente para obtener una aproximación de los valores de $f(0.9)$ y de $f(1.2)$.
¿Puedes justificar si alguna de dichas aproximaciones es por defecto o por exceso?

Solución:

(a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:

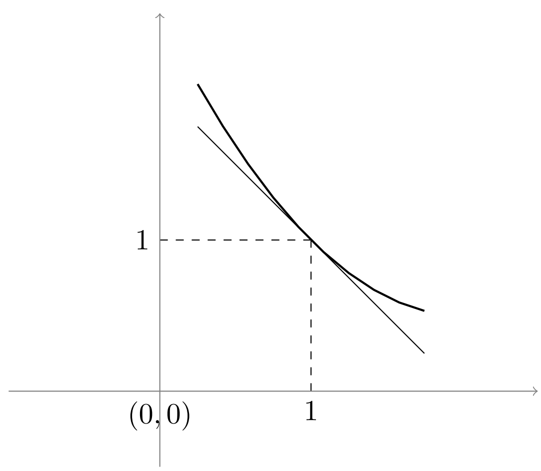
$$(1 + xy')e^y + (y' + y)e^x = 0$$

y sustituyendo $x = 1,\ y(1) = 1$ se deduce que: $2e(y' + 1) = 0 \Longrightarrow y'(1) = f'(1) = -1$.
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 1 - (x - 1)$; o bien, $y = 2 - x$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:

$$(y' + xy" + (1 + xy')y')e^y + (y" + 2y' + y)e^x = 0$$

y sustituyendo $x = 1, y(1) = 1, y'(1) = -1$ se deduce que: $2e(y" - 1) = 0 \Rightarrow y"(1) = f"(1) = 1$.
Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = 1 - (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2$.

(b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f cerca del punto $x = 1$ será, aproximadamente, así:



Por otro lado, las aproximaciones de primer orden serán:

$$f(0.9) \approx P_1(0.9) = 1 - (-0,1) = 1,1, \qquad f(1,2) \approx P_1(1.2) = 1 - (.,2) = 0.8.$$

Como la función es convexa cerca de $x = 1$, pues $f"(1) > 0$, la aproximación de los valores de f por la recta tangente será, en ambos casos, por defecto.

$\boxed{3}$

Sea $C(x) = 85 + 100x - x^2$ la función de costes y $p(x) = 200 - 3x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, siendo $0 \leq x \leq 50$ el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se pide:

(a) (6 puntos) Determinar el precio p^* y la cantidad x^* en los cuales se alcanza el beneficio máximo.

(b) (9 puntos) Si el gobierno disminuye los costes por medio de una subvención de S euros por unidad producida, determinar la nueva cantidad $x^*(S)$ y el nuevo precio $p^*(S)$ que maximizan el beneficio de la compañía.

Comparar los resultados con el caso anterior.

Solución:

(a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios

$$B(x) = (200 - 3x)x - (85 + 100x - x^2) = -2x^2 + 100x - 85.$$

Si calculamos la primera y segunda derivada de B: $B'(x) = -4x + 100; B''(x) = -4 < 0$, luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{10}{4} = 25$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.

Finalmente, $p^* = p(25) = 200 - 75 = 125$.

(b) Como la nueva función de costes es $C(x) = 85 + (100 - S)x - x^2$, la nueva función de beneficios será $B(x) = -2x^2 + (100 + S)x - 85$. Como $B'(x) = -4x + 100 + S; B''(x) = -4 < 0$, vemos que B tiene un único punto crítico en $x^*(S) = \dfrac{100 + S}{4} = 25 + \dfrac{S}{4}$.

Como B es una función cóncava, el punto crítico es el único maximizador global.

Finalmente, $p^*(S) = 200 - 3\left(25 + \dfrac{S}{4}\right) = 125 - 3\dfrac{S}{4}$.

Como se puede ver, la cantidad producida ha aumentado y los precios han disminuido, cualquiera que sea el valor de $S > 0$.

4

Dada la función $f(x) = x^2 \ln x$, se pide:

(a) (8 puntos) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y límites en 0^+ y en ∞ de la función f.

(b) (7 puntos) Discutir, según los valores de $b > 0$, si f alcanza su máximo y/o mínimo global en el intervalo $(0, b]$.
Sugerencia: dibujar la gráfica de f.

Solución:

(a) Calculemos la derivadas primera y de esta función.

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2(\frac{1}{x}) = x(2\ln x + 1).$$

Como el dominio de dicha función es $(0, \infty)$, se deduce que:

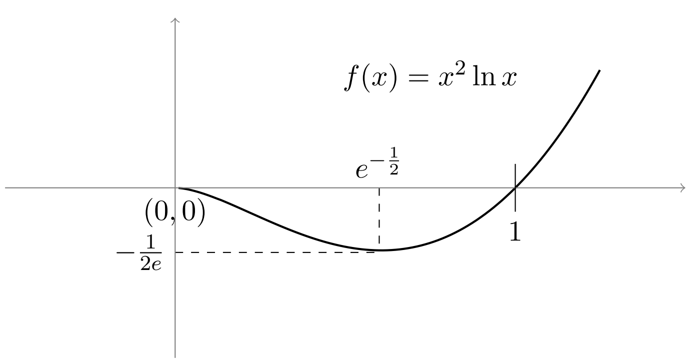
f es creciente si $2\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -\frac{1}{2} \iff x \geq e^{-1/2}$; y

f es decreciente si $2\ln x + 1 < 0 \iff \ln x < -\frac{1}{2} \iff 0 < x \leq e^{-1/2}$.

Por tanto, $x = e^{-1/2}$ es el único minimizador global en $(0, \infty)$.

Por otro lado, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x^2} = \frac{-\infty}{\infty}$ =[aplicando L'Hopital]= $= \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1/x}{-2/x^3} = 0$; por último: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$

(b) La gráfica de la función será, aproximadamente, así:



Por tanto, se observa claramente que:

i) si $0 < b \leq e^{-1/2}$, la función es decreciente en el intervalo $(0, b]$.

Por tanto, alcanza alcanza su mínimo global en b, pero no su máximo global.

ii) si $e^{-1/2} < b < 1$, la función es decreciente en el intervalo $(0, e^{-1/2}]$ y creciente en el intervalo $[e^{-1/2}, b]$, pero como $b < 1$, se cumple que $f(b) < f(1) = 0$, luego f no alcanza su máximo global en $(0, b]$, pues $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Obviamente, el mínimo global se alcanza en $x = e^{-1/2}$.

iii) si $1 \leq b$, la función es decreciente en el intervalo $(0, e^{-1/2}]$ y creciente en el intervalo $[e^{-1/2}, b]$, y como $1 \leq b$, se cumple que $0 = f(1) \leq f(b)$, luego f alcanza su máximo global en $x = b$, pues $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Obviamente, el mínimo global se alcanza en $x = e^{-1/2}$.