UC3M
Introducción a las Matemáticas para la Economía
Examen Final, 16/01/2019 **RESUELTO**

1

Se considera la función $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

(a) (15 puntos) Determinar el dominio y calcular las asíntotas de f. Determinar la imagen de f.

(b) (15 puntos) Hallar los intervalos en los que f is monótona, así como los intervalos donde f es cóncava o convexa. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

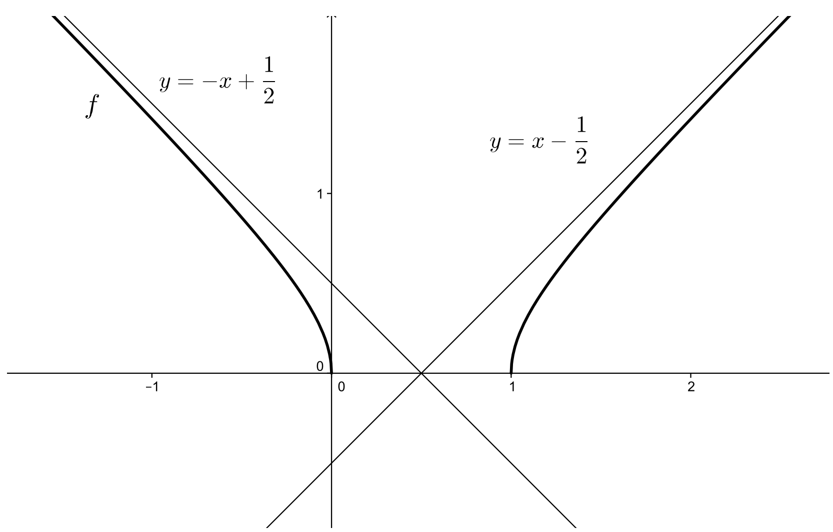
(a) El dominio de la función f es el conjunto de puntos $\{x : x^2 - x = x(x-1) \geq 0\} = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. En cuanto a las asíntotas, observar que f es continua en todo su dominio, y el dominio es la unión de intervalos cerrados y por tando no existen asíntotas verticales. Por otro lado,

- $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{\pm\sqrt{x^2}} = \pm \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \pm 1.$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} [f(x) - \pm\, x] = \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} [\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2}] =$ [multiplicando y dividiendo por su conjugado:]
  $= \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} [\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2}][\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2}]/[\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2}] =$
  $= \lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2}} = -\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2}} =$
  [dividiendo al numerador y al denominador por $x = \sqrt{x^2}$]
  $= -\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 - 1/x} + 1} = \mp \frac{1}{2};$
- Por lo tanto, f tiene como asíntotas oblicuas a $y = x - \frac{1}{2}$ en ∞, y $y = x + \frac{1}{2}$ en $-\infty$.

Como $f(1) = 0$, $f(x) \geq 0$, f es continua y $y = x - \frac{1}{2}$ es su asíntota oblicua en ∞, la imagen de f es $[0, \infty)$.

(b) $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$, entonces f es creciente $[1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0]$. Además, $f''(x) = \left(\dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}\right)' = \dfrac{4\sqrt{x^2 - x} - (2x-1)^2/\sqrt{x^2 - x}}{4(x^2 - x)} < 0$, para todo x perteneciente a $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, por lo tanto f es cóncava en ambos intervalos, en $(-\infty, 0]$ y en $[1, \infty)$ (como f es continua, podemos considerar la concavidad en los intervalos cerrados).

Observar que $4\sqrt{x^2 - x} < (2x-1)^2/\sqrt{x^2 - x} \Longleftrightarrow 4(x^2 - x) < (2x-1)^2 \Longleftrightarrow 0 < 1$.



$\boxed{2}$

Dados los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, se considera la función $f(x) = \begin{cases} 1 + ax^2, & \text{si } x < -1; \\ abx & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$

(a) (15 puntos) ¿Para qué valores de los parámetros a y b, la función f es continua y derivable? Justifique su respuesta.

(b) (15 puntos) Para los valores de los parámetros $a = -\frac{1}{2}$ and $b = 1$, hallar los extremos globales y locales de la función f en el intervalo $[-2, 0]$.

Solución:

(a) Vamos a estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función f en el punto $x = -1$, ya que para el resto de los puntos sabemos que la función es continua al estar formada por dos polinomios.

Calculamos los límites laterales $\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = 1 + a$, $f(-1) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = -ab$, y obtenemos que la función es continua en $x = -1$ si y solo si $1 + a = -ab$.

Por otro lado, suponiendo que f es continua en -1, será derivable si y solamente si
$-2a = f\,'_-(-1) = f'_+(-1) = ab$.

Por lo tanto, f es continua y derivable en $x = -1$ si y solo si $1 + a = -ab, -2a = ab$. Y tendremos los siguientes casos:

- Si $a = 0$, entonces la primera ecuación no se cumple;
- Si $a \neq 0$, entonces por la segunda ecuación de arriba, $b = -2$ y utilizando la primera ecuación a continuación obtenemos $a = 1$.

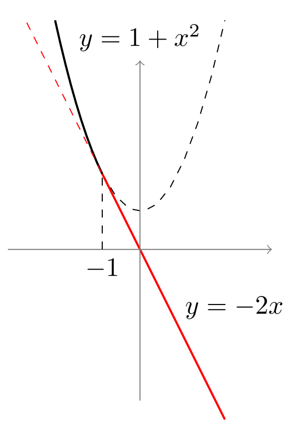
En definitiva, f es continua y derivable en $x = -1$ si y solo si $a = 1$ y $b = -2$.

(b) Los valores de los parámetros $a = -\frac{1}{2}$ y $b = 1$ satisfacen la condición de continuidad $1 + a = -ab$ discutida en el apartado anterior. Luego, f es es continua. Por el Teorema de Weierstrass sabemos que f alcanza sus extremos globales en el intervalo cerrado $[-2, 0]$.

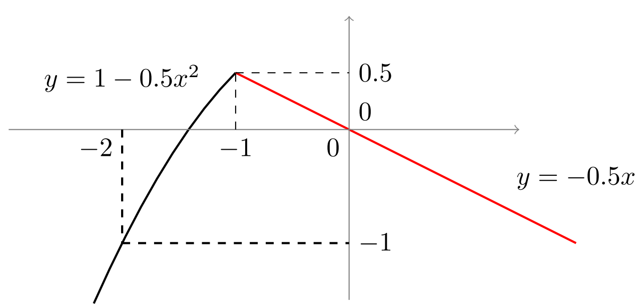
Por otro lado, la condición de derivabilidad $-2a = ab$ no se cumple, y por tanto f no es derivable en $x = -1$. Así, -1 es un punto crítico para f. Para encontrar más puntos críticos, hallamos las derivadas de la función: $f'(x) = -x$, si $x < -1$ y $f'(x) = -\frac{1}{2}$, si $x > -1$. Luego, f no tiene más puntos críticos.

Los candidatos para extremos globales de la función f en $[-2, 0]$ son por lo tanto -2, -1 y 0, como $f(-2) = -1$, $f(-1) = \frac{1}{2}$ y $f(0) = 0$, obtenemos que $x = -2$ es el punto mínimo global y $x = -1$ es el punto máximo global de f en $[-2, 0]$. Además, podemos afirmar que el punto $x = 0$ es un mínimo local de f en $[-2, 0]$, al comprobar que f es decreciente en el intervalo $[-1, \infty)$.

Caso (a)



Caso (b)



$\boxed{3}$

Responder las siguientes cuestiones.

(a) (15 puntos) Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = (1+x)^{10}$ en el punto $x = 0$. Mediante este polinomio de Taylor, calcular el valor aproximado del número $(1.02)^{10}$.

(b) (15 puntos) Probar que la ecuación $ye^{-x} - y^3 - 3x = 0$ define a y como función implícita de x, $y = f(x)$, en un entorno del punto $(0,1)$. Calcular $f'(0)$, la derivada de la función implícita $y = f(x)$ en el punto 0.

Solución:

(a) El polinomio de Taylor de segundo orden de f en $x = 0$, es $P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$. Calculando los coeficientes obtenemos $P(x) = 1 + 10x + 45x^2$. El valor aproximado de $(1.02)^{10}$ es

$$(1.02)^{10} = f(0.02) \approx P(0.02) = 1 + 10 \times 0.02 + 45 \times (0.02)^2 = 1 + 0.2 + 0.0180 = 1.2180.$$

(b) Observar que el punto $(x, y) = (0, 1)$ satisface la ecuación $ye^{-x} - y^3 - 3x = 0$. Además, si definimos $F(x, y) = ye^{-x} - y^3 - 3x$, entonces $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^{-x} - 3y^2$, y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = -2 \neq 0$, y por lo tanto la ecuación $F(x, y) = 0$ define a $y = f(x)$ como una función implícita de x en un entorno de $x = 0$, con $f(0) = 1$. Derivando la ecuación $F = 0$ con respecto de x obtenemos, $y'e^{-x} - ye^{-x} - 3y'y^2 - 3 = 0$, y evaluando esta expresión en $x = 0$ y $y = 1$, obtenemos $y' - 1 - 3y' - 3 = 0$. Y resolviendo esta ecuación, $y' = f'(0) = -2$.

$\boxed{4}$

Se considera la función de costes $C(x) = 4000 - 40x + 0.02x^2$ y la función inversa de la demanda $p(x) = 50 - 0.01x$ de una empresa monopolista que produce x unidades de un determinado bien. Responder las siguientes cuestiones.

(a) (15 puntos) Calcular el precio unitario, p^*, y la cantidad de bien producido, x^*, que maximiza los beneficios de la empresa. Justifique sus respuestas.

(b) (15 puntos) Calcular el precio unitario, p^{**}, y la cantidad de bien producido, x^{**}, que minimiza la función de costes medios de la empresa. Justifique sus respuestas.

Solución:

(a) La función de beneficio es $\pi(x) = (50-0.01x)x - (4000-40x+0.02x^2) = -0.03x^2+90x-4000$. Las derivadas de primer y segundo orden son $\pi'(x) = -0.06x + 90$ y $\pi''(x) = -0.06 < 0$, for all x. Por lo tanto, π tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{90}{0.06} = 1500$. Como la función π es cóncava, dicho punto crítico es el único maximizador global de los beneficios de la empresa. Y por último, $p^* = p(1500) = 50 - 0.01 \times 1500 = 35$.

(b) La función de coste medio es $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{4000}{x} - 40 + 0.02x$. Sus derivadas de primer y segundo orden son $\overline{C}'(x) = -\dfrac{4000}{x^2} + 0.02$, y $\overline{C}''(x) = \dfrac{8000}{x^3} > 0$, para todo $x > 0$. El único punto crítico de $\overline{C}$ en la region $x > 0$ es $x^{**} = \sqrt{5} \times 200$. Como la función $\overline{C}$ es convexa, el punto crítico obtenido es el único minimizador global de la función de coste medio. Por último, $p^{**} = p(\sqrt{5} \times 200) = 50 - 0.01 \times \sqrt{5} \times 200 = 50 - 2\sqrt{5}$.