Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2001

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

1. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio W generado por el sistema $S = \{(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)\}$. Razona la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $a = 1$ un sistema generador de W es $T = \{(1,1,1),(-2,-2,-2)\}$ y la dimensión de W es 2.
b) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ una base de W es la canónica de $\mathbb{R}^3$.
c) La dimensión de W es 2 si $a = -2$
1.5 puntos

Solución: Observamos que

$$\dim W = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 1-a & 1-a^2\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 2-a-a^2\end{pmatrix}$$

Por tanto, si $a = 1$,

$$\dim S = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1$$

por lo que el apartado (a) es falso. Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, entonces

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 2-a-a^2\end{vmatrix} = (a-1)(2-a-a^2) = (a-1)(1-a)(a+2) \neq 0$$

de donde $\dim W = 3$. Por tanto, $W = \mathbb{R}^3$ y (b) es cierto. Finalmente, si $a = -2$,

$$\dim W = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 2-a-a^2\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$$

de donde el apartado (c) es verdadero.

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x,y) = (x+y, 3x+3y, 2x+2y, -3x-3y)$.

a) Determinar la matriz de f respecto de las bases canónicas.

b) Calcular la dimensión de $\mathrm{N}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ y dar una base para cada uno de estos subespacios.

1 punto

Solución apartado (a):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución apartado (b): $\mathrm{N}(f)$ es el conjunto de las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, este sistema es equivalente al sistema $x + y = 0$. Tomando x como parámetro, $\mathrm{N}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$. Una base de $\mathrm{N}(f)$ es $\{(1,-1)\}$ y $\dim \mathrm{N}(f) = 1$. Utilizando la fórmula

$$\dim \mathrm{N}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

vemos que $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$. Como $\mathrm{Im}(f)$ esta generado por el vector $(1,3,2,-3)$, este vector es una base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Encontrar los puntos del conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=3\}$ donde la función $f(x,y)=x^2y$ alcanza los valores máximo y mínimo.

1.5 puntos

Solución: La función de Lagrange es $L(x,y) = x^2y + \lambda(3-x^2-y^2)$. Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2xy - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x^2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 &= 3 \end{aligned}$$

Este sistema es equivalente al sistema

$$\begin{gathered} x(y-\lambda)=0 \\ x^2-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=3 \end{gathered}$$

Una solución de la primera ecuación es $x=0$. De la tercera ecuación obtenemos $y=\pm\sqrt{3}$, mientras que de la segunda queda $\lambda=0$. Obtenemos los puntos $(0,\sqrt{3})$ y $(0,-\sqrt{3})$.

Si $x \neq 0$, entonces $y=\lambda$. De la segunda ecuación obtenemos que $x^2=2\lambda^2$. Sustituyendo en la tercera ecuación queda que $3=x^2+y^2=3\lambda^2$, de donde $\lambda=\pm 1$. Utilizando que $y=\lambda$, $x=\pm\sqrt{2}$, obtenemos las soluciones $(\sqrt{2},1)$, $(\sqrt{2},-1)$, $(-\sqrt{2},1)$ $(-\sqrt{2},-1)$.

Observando que

$$\begin{aligned} f(0,\sqrt{3}) &= f(0,-\sqrt{3}) = 0 \\ f(\sqrt{2},1) &= f(-\sqrt{2},1) = 2 \\ f(\sqrt{2},-1) &= f(-\sqrt{2},-1) = -2 \end{aligned}$$

vemos que los puntos $(\sqrt{2},-1)$ y $(-\sqrt{2},-1)$ son mínimos y los puntos $(\sqrt{2},1)$ y $(-\sqrt{2},1)$ son máximos.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula el polinimio característico y comprueba que $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ son autovalores.

b) Estudia si es o no diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentra la matriz diagonal D y una matriz de paso P de forma que $A = PDP^{-1}$.

1.5 puntos

Solución apartado (a): Desarrollando por la regla de Sarrus se obtiene que $|A - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$.

Solución apartado (b): El espacio de vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 1$ es el conjunto de soluciones del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema es equivalente al sistema

$$x - y + z = 0$$

Tomando x, z como parámetros, queda $y = x + z$ y obtenemos $S(1) = \{(x, x+z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, $\dim S(1) = 2$ y una base es $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$.

Ahora calculamos $S(-1)$, el espacio de vectores propios asociados al valor propio $\lambda = -1$. Este conjunto está formado por las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \left\{ \begin{array}{rrrcl} & 2y & -2z & = & 0 \\ 2x & & +2z & = & 0 \\ 2x & -2y & +4z & = & 0 \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos que $y = z$, $x = -z$, que también satisfacen la última ecuación. Por tanto, $S(-1) = \{(-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$, $\dim S(-1) = 1$ y una base es $\{(-1,1,1)\}$.

Concluimos que A es diagonalizable y que $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2 x}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Estudiar si f es continua en $(0,0)$.
b) Calcula las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
1 punto

Solución apartado (a): Observemos que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq f(0,0)$$

por lo que f no es continua en $(0,0)$.

Solución apartado (b):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$$

que no existe. Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

6. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{ll} 3x - y + 2z & = 1 \\ x + 4y + z & = \alpha \\ 2x - 5y + \beta z & = -2 \end{array}\right\}$, se pide. Discutir y resolver el sistema según los distintos valores de los parámetros α y β.

1 punto

Solución: La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \alpha \\ 2 & -5 & \beta & -2 \end{array}\right)$$

intercambiando las dos primeras filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & \beta & -2 \end{array}\right)$$

que se puede convertir en el sistema equivalente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & \alpha \\ 0 & -13 & -1 & 1-3\alpha \\ 0 & -13 & \beta-2 & -2-2\alpha \end{array}\right)$$

que es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & \alpha \\ 0 & -13 & -1 & 1-3\alpha \\ 0 & 0 & \beta-1 & 3-\alpha \end{array}\right)$$

De aquí observamos que si $\beta \neq 1$ el sistema es compatible determinado y la solución es

$$z = \frac{3-\alpha}{\beta-1}, \quad y = \frac{3\alpha-1}{13} - \frac{z}{13}, x = \alpha - 4y - z$$

Si $\beta = 1$, entonces el sistema es incompatible si $\alpha \neq 3$. Mientras que si $\beta = 1$ y $\alpha = 3$ queda un sistema equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

que es un sistema compatible indeterminado. Se puede tomar $y = t$ como parámetro y el conjunto de soluciones es $\{(9t-5, t, 8-13t)\mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$.

7. Sea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1, y \geq 1\right\}$. Se pide:

a) Dibujar el conjunto.

b) Estudiar si el conjunto A es cerrado, acotado y/o convexo.

c) Considera $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{xy}{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

Estudia si f alcanza máximo y/o mínimo global en A.

1.5 puntos

Solución apartado (a):

Solución apartado (b): Como $\mathrm{Fr}(A) \subset A$ el conjunto es cerrado. Claramente, es acotado y convexo.

Solución apartado (c): La función f es continua excepto en los puntos que anulan los denominadores: Es decir, f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)(2,2)\}$. Se comprueba fácilmente que estos puntos no verifican las restricciones del problema, por que lo que $(0,0) \notin A$, $(2,2) \notin A$ y f es continua en A, que es compacto (cerrado y acotado). Por el teorema de Herr Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo globales en A.

8. Dada $f(x,y) = b^2x^2 - axy + 2y^2$. Hallar para qué valores de a y b la función es estrictamente convexa.

1 punto

El vector gradiente de f es

$$\nabla f(x,y) = (2b^2x - ay, -ax + 4y)$$

por lo que la matriz Hessiana es

$$\begin{pmatrix} 2b^2 & -a \\ -a & 4 \end{pmatrix}$$

y vemos que $D_1 = 2b^2$, $D_2 = 8b^2 - a^2$. Una condición suficiente (para que la función sea estrictamente convexa) es que $8b^2 - a^2 > 0$, porque entonces $D_1 > 0$, $D_2 > 0$.

Si $8b^2 - a^2 < 0$ la función no es convexa.

Si $8b^2 - a^2 = 0$, con $a = 2\sqrt{2}b$,tenemos que

$$f(x,y) = b^2x^2 - axy + 2y^2 = (bx - \sqrt{2}y)^2$$

que es convexa pero no estrictamente convexa ya que se anula (y, por tanto es constante), a lo largo de la recta $bx - \sqrt{2}y = 0$.

Por último, si $8b^2 - a^2 = 0$, con $a = -2\sqrt{2}b$,tenemos que

$$f(x,y) = b^2x^2 - axy + 2y^2 = (bx + \sqrt{2}y)^2$$

que es convexa pero no estrictamente convexa ya que se anula (y, por tanto es constante), a lo largo de la recta $bx + \sqrt{2}y = 0$.