Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
PUNTOS						

Departmento de Economía **Matematicas I Examen Final** **18 junio 2024**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$. Se pide:**

(a) Hallar las asíntotas de $f(x)$.

(b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la imagen de $f(x)$.
Sugerencia: Observar que $\ln(a) - b = \ln a - \ln(e^b)$

(c) Hallar los intervalos de convexidad y concavidad de $f(x)$. Representar $f(x)$.

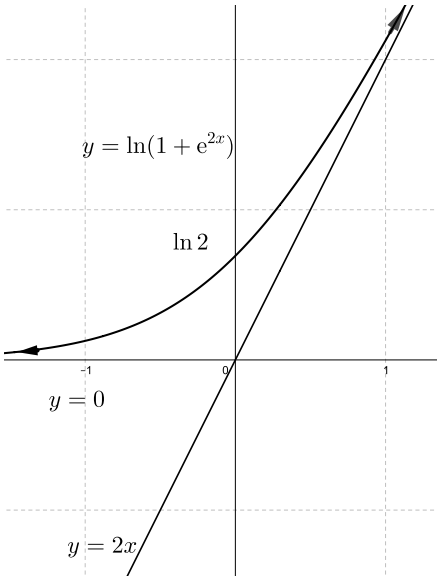
0,3 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c)

---

a) En primer lugar, la función es continua en todo $\mathbb{R}$, luego las únicas asíntotas que hay que estudiar son en $\pm\infty$.
$\lim_{x\to-\infty} \ln(1 + e^{2x}) = \ln 1 = 0$, luego $y = 0$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.
En cuanto a ∞ : $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ = (aplicando L'Hopital)= = $\lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{-2x}+1} = 2$; y ahora: $\lim_{x\to\infty} \ln(1 + e^{2x}) - 2x = \lim_{x\to\infty} \ln(1 + e^{2x}) - \ln e^{2x}$ =
$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{1+e^{2x}}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \ln(e^{-2x} + 1) = \ln 1 = 0$,
luego $y = 2x$ es la asíntota oblícua en ∞.

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, derivamos la función y estudiamos su signo:
$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} > 0$, luego f es creciente en todo $\mathbb{R}$. En cuanto a la imagen, como $f(x)$ es continua en su dominio, f es creciente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen será $(0, \infty)$.

c) Para estudiar la concavidad/convexidad, calculamos la derivada segunda.
$f''(x) = (\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}})' = (\frac{2+2e^{2x}-2}{1+e^{2x}})' = (2 - \frac{2}{1+e^{2x}})' = \frac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} > 0$,
luego la función $f(x)$ es convexa en toda la recta real.
En cuanto a la gráfica de la función, tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



(2) **Dada la ecuación** $32\sqrt{2+x} - y - y^3 = 62$, **se pide:**

(a) Probar que dicha ecuación define de forma implícita la función $y = f(x)$ en un entorno del punto $x = 2, y = 1$.

(b) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $a = 2$.

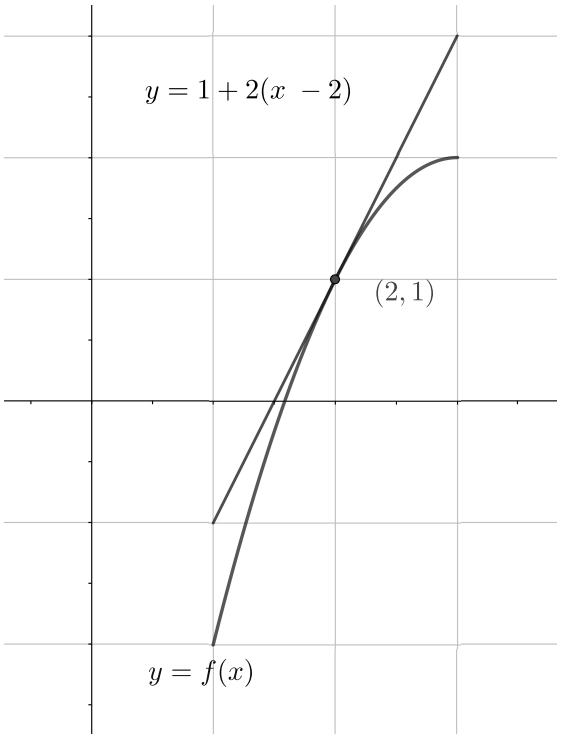
(c) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 2, y = 1$.
Calcular aproximadamente, utilizando la recta tangente, $f(1,9)$.
Comparar dicho valor aproximado con el valor exacto de $f(1,9)$.
Sugerencia para c: utilizar que $f''(2) < 0$.
0,2 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

---

a) Si consideramos la función $F(x,y) = 32\sqrt{2+x} - y - y^3$, se debe cumplir que:
i) En primer lugar, $F(2,1) = 64 - 1 - 1 = 62$; y, en segundo lugar
ii) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -1 - 3y^2 \Longrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y}(2,1) = -4 \neq 0.$
Luego la ecuación define de forma implícita la función $y = f(x)$ en un entorno del punto $x = 2, y = 1$.

b) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$\dfrac{32}{2\sqrt{2+x}} - y' - 3y^2y' = 0$
sustituyendo $x = 2,\ y(2) = 1$ se deduce que $8 = 4y'(2) \Longrightarrow f\,'(2) = 2$. Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 1 + 2(x-2)$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$\dfrac{(-1/2)16}{(2+x)^{3/2}} - y" - 6y(y')^2 - 3y^2y" = 0$
sustituyendo $x = 2,\ y(2) = 1, y'(2) = 2$ se deduce que:
$\dfrac{-8}{8} - 4y"(2) - 6.2^2 = 0 \Longrightarrow -25 = 4y"(2) \Longrightarrow y"(2) = -\dfrac{25}{4}$
Luego la ecuación del polinomio de Taylor de orden 2 será: $y = P_2(x) = 1 + 2(x-2) - \dfrac{25}{8}(x-2)^2$.

c) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 2$, será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.
Por otro lado, utilizando la recta tangente en $x = 2$, tenemos que: $f(1,9) \approx 1 + 2(1,9-2) = 0,8$.
Por otro lado, $f(1,9) < 1,8$, pues $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 2$.



(3) **Sea $C(x) = C_0 + 2x + x^2$ la función de costes y $p(x) = A - 2x$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $A, C_0 > 0$. Se pide:**

(a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 8$, calcular el valor de los parámetros A, C_0.

(b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio es $x^{**} = 8$, calcular el valor de los parámetros A, C_0.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (A - 2x)x - (C_0 + 2x + x^2) = -3x^2 + (A - 2)x - C_0$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -6x + A - 2$, $B"(x) = -6 < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{A-2}{6}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Luego $x^* = 8 = \dfrac{A-2}{6} \Longrightarrow A = 50$; C_0 puede tomar cualquier valor.

.

b) Como la función de coste medio es $\dfrac{C(x)}{x} = x + 2 + \dfrac{C_0}{x}$,
su derivada será: $(\dfrac{C(x)}{x})' = 1 - \dfrac{C_0}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = C_0$.
Como $(\dfrac{C(x)}{x})" = \dfrac{2C_0}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.
Luego $x^{**} = 8 \Longrightarrow C_0 = 64$; A puede tomar cualquier valor.

(4) **Sea $f(x) = x^3 - 6x$. Se pide:**

(a) Enunciar el teorema de Bolzano de los ceros para una función g definida en $[a, b]$.

(b) Hallar los ceros o raíces de $f(x)$, así como los intervalos donde $f(x)$ presenta signo positivo o negativo.

(c) Determinar para que valores a, b la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cumple las hipótesis de dicho teorema. Determinar para que valores a, b la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ NO cumple las hipótesis, pero SI la tesis (o conclusión) de dicho teorema.

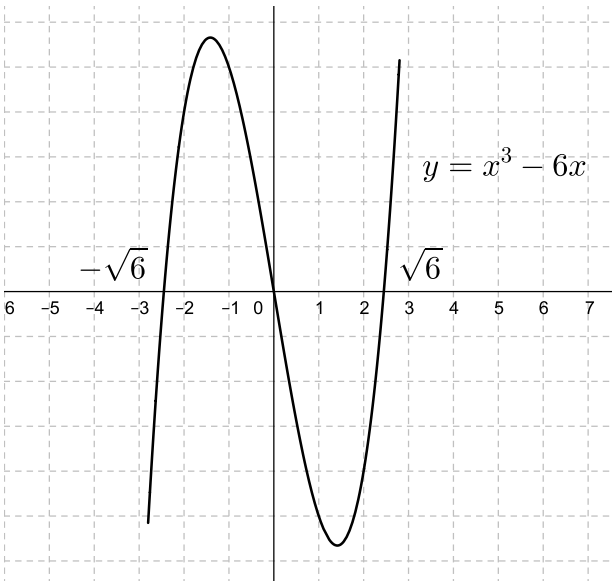
0,2 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

---

a) .

b) Obviamente, $f\ (x) = x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$, así que las raíces son $0, \sqrt{6}$ y $-\sqrt{6}$.
Teniendo en cuenta que $-3 < -\sqrt{6} < -1 < 0 < 1 < \sqrt{6} < 3$,
y que $f(-3) < 0 < f(-1)$ y $f(1) < 0 < f(3)$, se deduce que:
i) $f(x) < 0$ cuando $x \in (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, \sqrt{6})$.
ii) $f(x) > 0$ cuando $x \in (-\sqrt{6}, 0) \cup (\sqrt{6}, \infty)$.
.

c) Por los datos anteriores, la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano cuando sucede uno de los cuatro casos siguientes:
i) $a < -\sqrt{6} < b < 0$
ii) $a < -\sqrt{6}, \sqrt{6} < b$
iii) $-\sqrt{6} < a < 0 < b < \sqrt{6}$
iv)$0 < a < \sqrt{6} < b$.
Por otro lado, la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cumple la tesis del teorema de Bolzano, aunque no las hipótesis, cuando sucede uno de los dos casos siguientes:
i) $a < -\sqrt{6}, 0 < b < \sqrt{6}$
ii) $-\sqrt{6} < a < 0, \sqrt{6} < b$
La gráfica de la función puede ayudar a ver este resultado.



(5) **Dadas la funciones** $f, g : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, **definidas por:** $f(x) = e^{-x+2}, g(x) = -\ln(x)$, **se pide:**

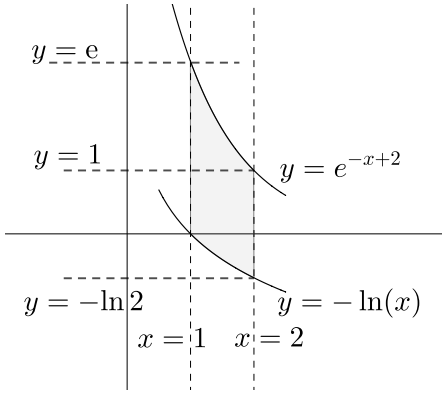
(a) Representar aproximadamente el conjunto A, delimitado por las gráficas de dichas funciones, y las rectas $x = 1, x = 2$.
Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular el área del conjunto dado.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

---

a) En primer lugar observamos que tanto $f(x)$ como $g(x)$ son decrecientes.
Por otro lado, dichas funciones no se cortan, pues:
$f(2) > 0 > g(1)$, luego el conjunto A viene definido así:
$A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, g(x) \leq y \leq f(x)\}$.
Por lo tanto, se deduce que el dibujo de A será, aproximadamente, así:



De esta forma, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:
máximo(A), mínimo(A) no existen.
maximales(A) $= \{(x, f(x)) : 1 \leq x \leq 2\}$.
minimales(A) $= \{(x, g(x)) : 1 \leq x \leq 2\}$.
.

b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:
área(A)$=\int_1^2 (e^{-x+2} + \ln x)dx$; por otro lado:
i) $\int e^{-x+2}dx = -e^{-x+2}$
ii) $\int 1.\ln x dx = x\ln x - x$, integrando por partes.
Por tanto, aplicando Barrow:
área (A)$= [-e^{-x+2} + x\ln x - x]_1^2 = (-1 + 2\ln 2 - 2) - (-e - 1) =$
$= e - 2 + 2\ln 2$ uds área.