HOJA 3 : Derivación I

1. Halla los puntos donde las siguientes funciones tienen tangente horizontal.

a) $f(x) = x^3 + 1$ b) $f(x) = 1/x^2$ c) $f(x) = x + senx$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ e) $f(x) = e^x - x$ f) $f(x) = senx + \cos x$

a) x=0; b) nunca; c) $x = \pi + 2k\pi$. d) nunca; e) $x = 0$; f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

.

2. (*)Prueba que las rectas tangentes a las gráficas de $y = x$ e $y = 1/x$ en sus puntos de corte son perpendiculares entre sí.

3. ¿En qué punto la tangente a la curva $y^2 = 3x$ es paralela a la recta $y = 2x$?
El punto de la curva es el $(\frac{3}{16}, \frac{3}{4})$.

.

4. (*)Calcula el punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(1,1)$.
El punto de corte es $x = 1/2$.

.

5. Calcula a para que la tangente a la gráfica de $f(x) = a/x + 1$ en el punto $(1, f(1))$ corte al eje horizontal en $x = 3$.
Luego el punto de corte será x=3 cuando a=1.

.

6. (*)Halla la recta tangente y normal a $f(x) = arctg\left(\frac{senx}{1+\cos x}\right)$ en $x = 0$.
Ecuación de la recta tangente: $y - 0 = \frac{1}{2}(x-0)$; ecuación de la recta normal: $y - 0 = -2(x-0)$.

.

7. Halla las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = (senx + tg3x)sen2x$ b) $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2x+6}$

c) $f(x) = 4x^{3/2}\cos 2x$ d) $f(x) = 5x\ln(8x + sen2x) + e^{tg5x}$

8. (*)Sea $f(x) = 2[\ln(1 + g^2(x))]^2$. Sabiendo que $g(1) = g'(1) = -1$, calcula $f'(1)$.
$f'(1) = 4\ln(2)$.

.

9. (*)Sabiendo que $a^b = e^{b\ln a}$, deriva $f(x) = x^{senx}$ y $g(x) = (\sqrt{x})^x$.
$f'(x) = x^{senx}(\cos x.\ln x + senx/x)$.
$g'(x) = (\sqrt{x})^x(\ln x + 1)/2$.

.

10. (*)Sean $f(x) = \ln(1 + x^2)$ y $g(x) = e^{2x} + e^{3x}$. Calcula $h(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, $h'(0)$ y $v'(0)$.
$h(x) = \ln(1 + e^{4x} + e^{6x} + 2e^{5x}), h'(0) = 4$
$v(x) = (1 + x^2)^2 + (1 + x^2)^3, v'(0) = 0$.

.

11. Sea $f : [-2,2] \to [-2,2]$ continua y biyectiva.
a) Supongamos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \alpha,\ \alpha \neq 0$. Hallar$(f^{-1})'(0)$.
b) Supongamos ahora que $f(0) = 1$ y $f'(0) = \alpha,\ \alpha \neq 0$. Hallar$(f^{-1})'(1)$.

c) Supongamos ahora que $f(1) = 0$ y $f'(1) = \alpha,\ \alpha \neq 0$. Hallar$(f^{-1})'(0)$.
a) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\alpha}$.
b) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\alpha}$
c) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\alpha}$
.

12. (*)Suponiendo que las siguientes ecuaciones definen a y como función derivable de x, calcula y' en los puntos que se indican:

a) $x^3 + y^3 = 2xy$ en $(1,1)$.

b) $senx = x(1 + \tan y)$ en $(\pi, 3\pi/4)$.

c) $x^2 + y^2 = 25$ en $(3,4), (0,5)$ y $(5,0)$.

a) $y' = -1$. b) $y' = \frac{-1}{2\pi}$. c) $y' = \frac{-3}{4}$ en $(3,4)$. $y' = 0$ en $(0,5)$. No existe derivada en $(5,0)$.
.

13. Calcula la derivada de las siguientes funciones indicando donde no son derivables.

a)(*) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ b) (*)$g(x) = \begin{cases} 1/|x| & x \leq -2 \\ (x+2)^2 & -2 < x \leq 0 \\ 3 + sen(x + \frac{\pi}{2}) & x > 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} arctg^2 x & x \leq 0 \\ sen^3 x & 0 < x \leq 2\pi \\ senx & 2\pi < x \end{cases}$

a) $f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ Obviamente, f no es derivable en 0.

b) $g'(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x < -2 \\ 2(x+2) & -2 < x < 0 \\ \cos(x + \frac{\pi}{2}) & x > 0 \end{cases}$ Obviamente, f no es derivable ni en -2 ni en 0.

c) $h'(x) = \begin{cases} \frac{2arctgx}{1+x^2} & x \leq 0 \\ 3sen^2 x.\cos x & 0 \leq x < 2\pi \\ \cos x & 2\pi < x \end{cases}$ Obviamente, f no es derivable en 2π.
.

14. (*)Halla a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x \geq 1 \\ ax^2 + bx - 1 & x < 1 \end{cases}$ sea derivable.

f derivable en 1 equivale a $a = -3, b = 9$.
.

15. Aplica el teorema del valor medio a f en el intervalo indicado y halla los valores c de la tesis del teorema.

a) $f(x) = x^2$ en $[-2,1]$ b) $f(x) = -2senx$ en $[-\pi,\pi]$

c) $f(x) = x^{2/3}$ en $[0,1]$ d) $f(x) = 2senx + sen2x$ en $[0,\pi]$

16. Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Demuestra que, si $f'(x) \neq 1$ en (a,b), entonces f tiene un único punto fijo en $[a,b]$.

17. Demuestra que la función f tiene un único punto fijo.

a) $f(x) = 2x + \frac{1}{2} senx$ b) $f(x) = 2x + \frac{1}{2}\cos x$

18. (*)Sea $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$. Determinar los extremos globales.

El mínimo se alcanza en -3 y el máximo se alcanza en -1 y en 2.

.

19. Sea $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ tal que f alcanza el máximo en $x = 2$ y el mínimo en $x = -3$. Sea $g(x) = -f(-x)$. ¿Qué se puede decir del máximo y del mínimo de g?