$\boxed{1}$

Encuentre la solución de la siguiente ecuación en diferencias con condiciones iniciales

$$x_{t+2} + x_{t+1} - 6x_t = 4t, \quad x_0 = -\frac{3}{4}, \quad x_1 = -\frac{3}{4}.$$

Solución:

La ecuación característica es $r^2 + r - 6 = 0$, cuyas raíces son 2 y -3. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_t^h = C_1 2^t + C_2(-3)^{\cdot}$$

Dado que 1 no es solución de de ecuación característica, una solución particular tiene la forma $x_t^p = At + B$. Substituyendo x_t^p en la ecuación encontramos los valores $A = -1$ y $B = -\frac{3}{4}$. Luego la solución general es

$$x_t^g = C_1 2^t + C_2(-3)^t - t - \frac{3}{4}.$$

Los valores de la solución buscada en $t = 0$ y $t = 1$ permiten obtener el par de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} &= C_1 + C_2 - \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} &= 2C_1 - 3C_2 - 1 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

cuya solución es $C_1 = \frac{1}{5}$, $C_2 = -\frac{1}{5}$. Por tanto, la solución es

$$x_t = \frac{1}{5}2^t - \frac{1}{5}(-3)^t - t - \frac{3}{4}.$$

$\boxed{2}$

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) (10 puntos) Determine todos los valores de los parámetros a y b para los que la matriz A es diagonalizable.

(b) (10 puntos) Para aquellos valores de los parámetros a y b para los que la matriz A es diagonalizable, escriba su forma diagonal y la matriz de paso.

Solución:

(a) Los valores propios de A son $\frac{1}{2}$ y b. Cuando $b = \frac{1}{2}$, el valor propio $\frac{1}{2}$ tiene multiplicidad 3. Dado que el rango de $A - \frac{1}{2}I$ es 1, la matriz no es diagonalizable. Cuando $b \neq \frac{1}{2}$, el valor propio $\frac{1}{2}$ tiene multiplicidad 2. La matriz $A - \frac{1}{2}I$ es

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

que tiene rango 1, luego A es diagonalizable.

(b) Sea $b \neq \frac{1}{2}$. Se tiene que $S(\frac{1}{2}) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ y $S(b) = \left\langle \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}-b}, -\frac{a}{\frac{1}{2}-b}, 1 \right) \right\rangle$. La matriz diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso a la forma diagonal es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\frac{1}{2}-b} \\ 0 & 1 & -\frac{a}{\frac{1}{2}-b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= \frac{x_t}{2} + z_t + 2 \\
y_{t+1} &= \frac{y_t}{2} + az_t + 1 \\
z_{t+1} &= bz_t
\end{aligned}
$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 1$, $b \neq \frac{1}{2}$.

(a) (5 puntos) Determine el punto de equilibrio del sistema de ecuaciones en diferencias.

(b) (10 puntos) Halle la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias.

(c) (5 puntos) Determine los valores de a, b para los que el sistema es globalmente asintóticamente estable. Para aquellos valores de a, b para los que el sistema de ecuaciones en diferencias es globalmente asintóticamente estable, halle el límite de las trayectorias solución cuando $t \to \infty$.

Solución:

(a) El punto de equilibrio es

$$x^0 = (4, 2, 0)$$

1. La matriz asociada al sistema de ecuaciones en diferencias es la matriz A del ejercicio anterior, con $b \neq \frac{1}{2}$, luego A es diagonalizable. La solución general es

$$
\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 b^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{\frac{1}{2}-b} \\ -\frac{a}{\frac{1}{2}-b} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

.

2. El sistema de ecuaciones en diferencias es globalmente asintóticamente estable para los valores de b satisfaciendo $|b| < 1$. Para estos valores de b, tenemos

$$
\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

$\boxed{4}$

Encuentre un factor integrante de la ecuación diferencial

$$(xt^2 - x^3)dt + (x^2t - t^3)dx = 0$$

y halle la solución general.

Solución:

Sean $P = xt^2 - x^3$ y $Q = x^2t - t^3$. La ecuación no es exacta, ya que $\frac{\partial P}{\partial x} = t^2 - 3x^2 \neq x^2 - 3t^2 = \frac{\partial Q}{\partial t}$. El cociente

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} = \frac{(t^2 - 3x^2) - (x^2 - 3t^2)}{x^2t - t^3} = \frac{4(t^2 - x^2)}{t(x^2 - t^2)} = -\frac{4}{t}$$

es independiente de x, luego un factor integrante es de la forma $\mu(t) = \exp\left(\int -\frac{4}{t}dt\right) = \frac{1}{t^4}$. Multiplicando la ecuación original por $\frac{1}{t^4}$, se convierte en exacta. Sea

$$V(t,x) = \int \left(\frac{xt^2 - x^3}{t^4}\right) dt = x\int t^{-2}dt - x^3 \int t^{-4}dt = -xt^{-1} + \frac{1}{3}x^3t^{-3} + f(x).$$

Al imponer $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x^2t - t^3}{t^4}$, tenemos

$$-t^{-1} + x^2t^{-3} + f'(x) = x^2t^{-3} - t^{-1},$$

luego $f'(x) = 0$ y podemos escoger $f(x) = 0$. La solución general es

$$-xt^{-1} + \frac{1}{3}x^3t^{-3} = C, \qquad C \text{ constant.}$$

$\boxed{5}$

(a) (5 puntos) Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$x'' - x' - 6x = 8 - 2t - 6t^2$$

(b) (5 puntos) Halle la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial anterior que satisface las condiciones iniciales

$$x(0) = 5, \quad \dot{x}(0) = -2$$

Solución:

(a) La ecuación característica es $r^2 - r - 6 = 0$, cuyas raíces son -2 y 3. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x^h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}.$$

Buscamos una solución particular de la forma

$$y(t) = At^2 + Bt + C.$$

Luego debe ser

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2At + B \\ y''(t) &= 2A \\ y'' - y' - 6y &= 2A - 2At - B - 6At^2 - 6Bt - 6C \end{aligned}$$

y obtenemos tres ecuaciones: $2A - B - 6C = 8$, $-2A - 6B = -2$ y $-6A = -6$. Resolviendo, tenemos $A = 1$, $B = 0$ y $C = -1$. Por tanto, la solución general es

$$x^g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} + t^2 - 1.$$

(b) Observamos que

$$\dot{x}^g(t) = -2c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{3t} + 2t.$$

Al substituir los valores $x^g(0) = 5$ y $\dot{x}^g(0) = -2$ en la solución general, tenemos el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 1 &= 5 \\ -2c_1 + 3c_2 &= -2 \end{cases}$$

con soluciones $c_1 = 4$ y $c_2 = 2$. Por tanto, la función buscada es

$$x(t) = 4e^{-2t} + 2e^{3t} + t^2 - 1$$

.

$\boxed{6}$

Se considera la ecuación diferencial autónoma

$$x' = F(x),$$

donde $F(x) = (x+3)(2-x)(x-5)$.

(a) (10 puntos) Determine y clasifique los puntos de equilibrio.

(b) (5 puntos) Sea $x(t)$ la solución del siguiente problema con valor inicial

$$x' = F(x), \quad x(0) = -5$$

1. Justifique si $x(t)$ es creciente o decreciente.
2. Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.
3. Haga un esbozo de la gráfica de $x(t)$.

(c) (5 puntos) Sea $x(t)$ la solución del siguiente problema con valor inicial

$$x' = F(x), \quad x(0) = 0$$

1. Justifique si $x(t)$ es creciente o decreciente.
2. Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.
3. Haga un esbozo de la gráfica de $x(t)$.

(d) (5 puntos) Sea $x(t)$ la solución del siguiente problema con valor inicial

$$x' = F(x), \quad x(0) = 5$$

1. Justifique si $x(t)$ es creciente o decreciente.
2. Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.
3. Haga un esbozo de la gráfica de $x(t)$.

(e) (5 puntos) Sea $x(t) = 3-t^2$. Discuta si esta función podría ser o no solución del siguiente problema con valor inicial

$$x' = F(x), \quad x(0) = 3$$

Solución:

(a) Los puntos de equilibrio son -3 (l.a.e.), 2 (inestable) y 5 (l.a.e.).

(b)
1. $x(t)$ es creciente.
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = -3$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$.
3.

(c)
1. $x(t)$ is decreciente.
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = -3$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 2$.
3.

(d)
1. $x(t) = 5$ para todos los valores de t.
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} x(t) = 5$.
3.

(e) $x(t) = 3 - t^2$ no puede ser solución, dado que cualquier solución con $2 < x(0) < 5$ debe ser creciente, pero $3 - t^2$ es decreciente.