UC3M
Matemáticas Avanzadas para la Economía
Examen Final, 09/01/2015 **RESUELTO**

$\boxed{1}$

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix},$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) (5 points) Estudie si A es o no diagonalizable dependiendo de los valores del parámetro a.

(b) (10 points) En el caso o casos en que A es diagonalizable, encuentre la forma diagonal y la matriz P que diagonaliza A.

(c) (10 points) En el caso o casos en que A es diagonalizable, resuelva el sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Los autovalores son 2 y 1, siendo 1 de multiplicidad 2. La matriz $A - I$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Tiene rango 1 sii $a = 0$. Por lo tanto, la matriz es diagonalizable sii $a = 0$.

(b) Sea $a = 0$, de manera que la matriz A es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil hallar

$$S(2) = \langle (1, 1, -1) \rangle, \qquad S(1) = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

La matriz P se forma tomando como columnas los valores propios encontrados anteriormente. La inversa es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Tenemos

$$A^t = PD^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 2^t - 1 & 1 & 0 \\ 1 - 2^t & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde D es la matriz asociada a A. Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 2^t - 1 & 1 & 0 \\ 1 - 2^t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t \\ 2^t \\ 1 + 2^t \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$

Se considera el siguiente modelo que relaciona los depósitos bancarios de los clientes de un banco con el tanto de interés ofrecido por éste. Los depósitos en el momento t se denotan D_t y el tanto de interés es R_t. Los clientes desean tener más depósitos bancarios cuanto mayor es el tanto de interés R_t. El modelo propone que la evolución de los depósitos está dada por

$$D_{t+1} = D_t + a(R_t - R), \qquad a > 0,$$

donde $R > 0$ es un tanto de interés umbral, por encima del cual (por debajo), los clientes desean aumentar (reducir) los depósitos. El tanto de interés que ofrece el banco disminuye con el aumento de los depósitos. El modelo propone como evolución del tanto de interés

$$R_{t+1} = S - bD_t, \qquad b > 0,$$

donde $S > R$ es el máximo tanto de interés que el banco está a dispuesto a ofrecer.

(a) (5 points) Determine una ecuación en diferencias de orden 2 para los depósitos bancarios.

(b) (10 points) Resuelva la ecuación en (a) para el caso $ab = \frac{1}{2}$ y estudie $\lim_{t\to\infty} D_t$.

(c) (10 points) Resuelva la ecuación en (a) para el caso $ab = \frac{1}{4}$ y estudie $\lim_{t\to\infty} D_t$.

Solución:

(a) $D_{t+2} - D_{t+1} + abD_t = a(S - R)$.

(b) La solución particular es la constante $D^* = (S - R)/b$. La ecuación característica tiene soluciones $r_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4ab}}{2}$. Cuando $ab = 1/2$, ambas raíces son complejas conjugadas, $r_{1,2} = \frac{1\pm i}{2}$, con módulo $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y argumento $\theta = \pi/4$, luego

$$D_t = 2^{-\frac{t}{2}} \left(A \cos \frac{\pi}{4} t + B \sin \frac{\pi}{4} t \right) + \frac{S - R}{b}.$$

$\lim_{t\to\infty} D_t = \frac{S-R}{b}$.

(c) Cuando $ab = 1/4$, la raíz es doble, $r_{1,2} = 1/2$ y por tanto

$$D_t = A2^{-t} + Bt2^{-t} + \frac{S - R}{b}.$$

$\lim_{t\to\infty} D_t = \frac{S-R}{b}$.

$\boxed{3}$

(a) (8 points) Resuelva

$$x' = \frac{2tx}{(t^2+2)(1+x)}, \quad x(0) = 1.$$

(b) (8 points) Encuentre la solución general de $(x + t^4)dt - tdx = 0$.

(c) (8 points) Encuentre la solución general de $x'' - x' + \frac{5}{4}x = 1 + 5t + 13e^t$.

Solución:

(a) Separable

$$\int \frac{1+x}{x} dx = \int \frac{2t}{t^2+2} dt,$$

por lo que

$$x + \ln x = \ln{(t^2+2)} + C.$$

Dado que $x(0) = 1$, $C = 1 - \ln 2$.

(b) no es exacta, pero existe un factor integrante que depende sólo de t, ya que $(P_x - Q_t)/Q = -\frac{2}{t}$. Luego t^{-2} es un factor integrante. La solución es $-\frac{x}{t} + \frac{t^3}{3} = C$, or $x = \frac{t^4}{3} - Ct$, con C constante.

(c) La ODE es lineal, de coeficientes constantes y segundo orden. La ecuación característica es $r^2 - r + \frac{5}{4} = 0$, con soluciones $\frac{1}{2} \pm i$. La solución general de la ecuación completa es $e^{t/2}(C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 4 + 4t + 4e^t$.

$\boxed{4}$

Una empresa produce un único bien que vende en cierto mercado. Sean $x(t)$ las ventas en el momento t. Sin publicidad, las ventas disminuyen a la tasa constante $\delta > 0$. Sin embargo, si la empresa aplica un esfuerzo publicitario de $a > 0$ unidades monetarias, entonces el incremento marginal de las ventas es

$$a\left(\frac{M - x(t)}{M}\right).$$

Aquí, $M > 0$ es un nivel máximo que las ventas no pueden superar, ya que el número máximo de posibles clientes es limitado. Por tanto, la evolución de las ventas está dada por

$$x'(t) = -\delta x(t) + a\left(\frac{M - x(t)}{M}\right), \tag{1}$$

y las ventas en el instante $t = 0$ son $x(0) = x_0$, con $0 \leq x_0 < M$.

(a) (10 points) Hallar la solución de la ecuación lineal (1). Mostrar que (1) admite un único punto de equilibrio, x^0, y hallarlo. ¿Es globalmente asintóticamente estable?

(b) (6 points) Se supone que en $t = 0$ las ventas iniciales de la empresa verifican $0 < x_0 < \dfrac{M}{2}$. Hallar el esfuerzo publicitario a tales que las ventas en el largo plazo se doblen, es decir, $x^0 = 2x_0$.

(c) (10 points) Supongamos ahora que el esfuerzo publicitario no es constante, sino proporcional a las ventas, $a(x) = px$, con $\underline{p > \delta}$. Por tanto, las ventas evolucionan como

$$\dot{x}(t) = -\delta x(t) + px(t)\left(\frac{M - x(t)}{M}\right).$$

Esta ecuación ya no es lineal. Hallar los puntos de equilibrio no negativos (si existen) y estudiar su estabilidad. Justifique su respuesta mediante el esbozo del diagrama de fases.

Solución:

(a) La solución es $x(t) = x^0 + (x_0 - x^0)e^{-kt}$,donde $x^0 = \frac{aM}{a+\delta M}$ es el punto de equilibrio y $k = \delta + \frac{a}{M}$. El equilibrio es g.a.e., dado que $k > 0$.

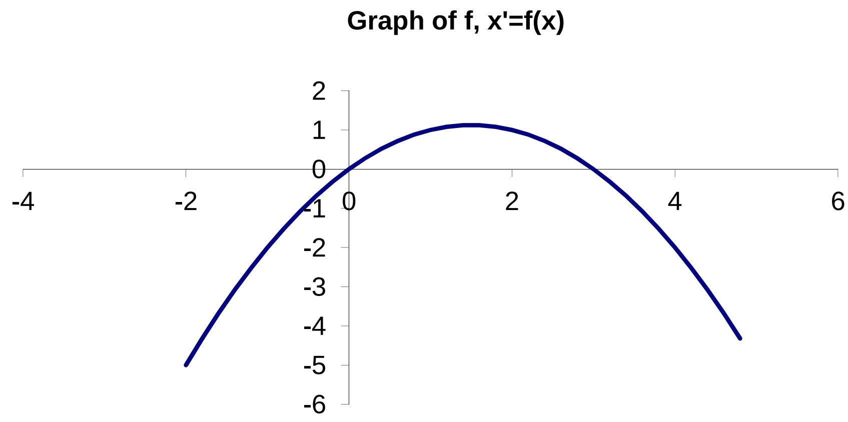
(b) Debemos resolver la ecuación

$$\frac{aM}{a + \delta M} = 2x_0$$

para encontrar

$$a = \frac{2\delta M x_0}{M - 2x_0}.$$

(c) Los puntos de equilibrio son las soluciones de $x\left(-\delta + p\left(1 - \frac{x}{M}\right)\right) = 0$, por lo que $x_1^0 = 0$ y $x_2^0 = M\left(1 - \frac{\delta}{p}\right) > 0$, porque $p > \delta$. Dado que la función que define la EDO es un parábola cńcava, es claro que x_1^0 es inestable y que x_2^0 es localmente asintóticamentne estable, como puede verse de la figura de más abajo.


Graph of f, x'=f(x)
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-4
-2
0
2
4
6