UC3M
Temas de Matemáticas Avanzadas para la Economía
Final, 15 de enero de 2024 **RESUELTO**

$\boxed{1}$

(a) (5 puntos) Halle la solución general de la ecuación en diferencias homogńea

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 2x_t = 0.$$

(b) (5 puntos) Halle la solución general de la ecuación en diferencias no homogńea

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 2x_t = 1 + 2^t.$$

(c) (5 puntos) Halle la solución del problema de valores iniciales

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 2x_t = 1 + 2^t, \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 2.$$

Solución:

(a) La ecuación característica es $r^2 - r - 2 = 0$, con soluciones -1 y 2, luego la solución general de la ecuación es $C_1(-1)^t + C_2 2^t$.

(b) Una solución particular es de la forma $A + Bt2^t$, ya que 2 es raíz de la ecuación característica, pero 1 no lo es. Debe cumplirse la ecuación en diferencias dada, luego

$$A + B(t+2)2^{t+2} - A - B(t+1)2^{t+1} - 2(A + Bt2^t) = 1 + 2^t.$$

Se obtienen las ecuaciones: $0 = 0$ del término $t2^t$, $8B - 2B = 1$ del término 2^t, y $A - A - 2A = 1$ del término independiente. La solución particular es por tanto $-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}t2^t$. Sumando ésta a la general de la homogénea del apartado anterior, la solución general de la completa es

$$x_t = C_1(-1)^t + C_2 2^t - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}t2^t.$$

(c) Hay que resolver las ecuaciones para C_1 y C_2 que se obtienen al imponer que la solución general de la completa satisfaga los datos iniciales:

$$0 = x_0 = C_1 + C_2 - \frac{1}{2}$$

$$2 = x_1 = -C_1 + 2C_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Al sumarlas se elimina C_1, obteniendo $C_2 = \frac{8}{9}$ y, por tanto, $C_1 = -\frac{7}{18}$.
La solución que cumple los datos iniciales dados es $x_t = -\frac{7}{18}(-1)^t + \frac{8}{9}2^t - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}t2^t$.

$\boxed{2}$

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a^2 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix},$$

donde a es un parámetro.

(a) (5 puntos) Calcule los valores propios de A. ¿Para qué valores del parámetro a es la matriz A diagonalizable?

(b) (5 puntos) Para los valores de a determinados en el apartado (a) anterior, halle una matriz D y una matriz inversible P tales que $P^{-1}AP = D$.

Solución:

(a) Los valores propios de A son los elementos diagonales, ya que la matriz es triangular: $\lambda_1 = -a^2$ doble y $\lambda_2 = 2$ simple. Notar que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ para todo valor de a.

La matriz A será diagonalizable si y sólo si el rango de la matriz $(A - (-a^2 I)_3) = (A + a^2 I_3)$ es 1. La matriz

$$A + a^2 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} + a^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 1 sii $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{2} + a^2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2(\frac{1}{2} + a^2) = 0$, es decir, sii $a^2 = 1$.

Luego, A es diagonalizable sii $a^2 = 1$.

(b) Tomamos $a^2 = 1$.

$S(-a^2) = S(-1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluciones: $(x, -\frac{2}{3}z, z)$. Podemos tomar los vectores propios $(1, 0, 0)$ y $(0, -\frac{2}{3}, 1)$.

$S(2)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluciones: $(2y, y, 0)$. Podemos tomar el vector propio $(2, 1, 0)$.

Tomando como matriz P

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde a es un parámetro. Observar que la matriz del sistema es la matriz A estudiada en el Problema 2.

(a) (5 puntos) Encontrar los puntos de equilibrio o estacionarios del sistema. Para los valores de a para los que la matriz del sistema es diagonalizable (estos valores se han determinado en el Problema 2 anterior), estudiar si el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

(b) (5 puntos) Para los valores de a para los que la matriz del sistema es diagonalizable (estos valores se han determinado en el Problema 2 anterior), hallar la solución general del sistema.

Solución:

(a) Conviene resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcllll} x & = & -a^2x & +3y & +2z & \\ y & = & & +\frac{1}{2}y & +z & +1 \\ z & = & & & -a^2z & \end{array} \right.$$

comenzando por la última ecuación, obteniendo $z = 0$ de la tercera, $y = 2$ de la segunda y $x = -a^2x + 6$ en la primera ecuación, es decir, $x = \frac{6}{1+a^2}$. El punto de equilibrio es entonces $(\frac{6}{1+a^2}, 2, 0)$. Hemos visto en el Problema 2 que la matriz del sistema es diagonalizable sii $a^2 = 1$. Los valores propios en este caso son -1 doble y $\frac{1}{2}$ simple y el punto de equilibrio, $(3, 2, 0)$. No es asintóticamente estable, ya que no todos los valores propios son menores que 1 en valor absoluto; sin embargo, sí que es un punto de silla, ya que unos de los valores propios es menor que 1 en valor absoluto.

(b) Hemos encontrado los valores y vectores propios de la matriz A en el Problema 2 cuando ésta es diagonalizable ($a^2 = 1$), lo que nos permite escribir la solución general en la forma

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = C_1(-1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2(-1)^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 2^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$

Se considera la EDO

$$t^3x' + 2t^2x = 1,$$

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general.

(b) (5 puntos) Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$t^3x' + 2t^2x = 1, \quad x(-1) = 2$$

¿Cuál es el intervalo de definición de la solución?

Solución:

The general solution is

$$\frac{\ln|t|}{t^2} + \frac{c_1}{t^2}$$

The solution of the initial value problem

$$t^3x' + 2t^2x = 1, \quad x(-1) = 2$$

is

$$\frac{\ln(-t)}{t^2} + \frac{2}{t^2}$$

the domain of definition is $(-\infty, 0)$.

$\boxed{5}$

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' + 6x' + 9x = 0$$

(b) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' + 6x' + 9x = 6e^{-3t}$$

(c) (5 puntos) Econtrar la solución del problema de valores iniciales

$$x'' + 6x' + 9x = 6e^{-3t}, \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = -1$$

Solución:

The general solution of $x'' + 6x' + 9x = 6e^{-3t}$ is

$$Ae^{-3t} + Be^{-3t}t + 3e^{-3t}t^2$$

For the given initial conditions, the solution is

$$e^{-3t}\left(3t^2 + 2t + 1\right)$$

$\boxed{6}$

Se considera el siguiente sistema de EDOs:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x^2 y - \frac{x^2}{16} - 25y + \frac{25}{16} \\ y' & = & xy - 4y \end{array} \right.$$

(a) (5 puntos) Halles los puntos estacionarios o de equilibrio.

(b) (5 puntos) Estudie la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Solución:

The stationary points are the solutions of the following system of equations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & x^2 y - \frac{x^2}{16} - 25y + \frac{25}{16} \\ 0 & = & xy - 4y \end{array} \right.$$

The second equation may be written as $y(x-4) = 0$. The solutions are $x = 4$ and $y = 0$.Plugging this into the first equation we obtain the stationary points are $(-5, 0)$, $(5, 0)$ and $\left(4, \frac{1}{16}\right)$. The Jacobian matrix of the system is

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - \frac{x}{8} & x^2 - 25 \\ y & x - 4 \end{pmatrix}$$

We see that

- $J(-5, 0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$. The eigenvalues are $-9, \frac{5}{8}$ and $(-5, 0)$ is unstable. It is a saddle point.
- $J(5, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. The eigenvalues are $-\frac{5}{8}, 1$ and $(5, 0)$ is unstable. It is a saddle point.
- $J\left(4, \frac{1}{16}\right) \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}$. The eigenvalues are $\pm\frac{3i}{4}$ and $\left(4, \frac{1}{16}\right)$ is a l.a.s. It is a spiral point.