

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos	20	15	10	15	10	70
Nota						

**Instrucciones:**

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **NO DESGRAPE** el cuadernillo.
- Por favor, muestre una tarjeta de identificación válida si le es requerido por el profesor.
- Lea el examen cuidadosamente. El examen consta de 5 ejercicios, para un total de 70 puntos.
- Recuerde que el módulo del número complejo  $z = a + ib$  es  $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  y su argumento es el ángulo  $\theta$  tal que  $\tan \theta = b/a$ .

Tabla de valores trigonométricos más usuales

$\theta$	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	$\text{tan } \theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\infty$

1

Se considera un mercado con un sólo bien en el que en cada instante de tiempo  $t$  la demanda es  $D_t = 100 - P_t$  y la oferta es  $S_t = P_{t-2}$ , donde  $P_{t-2}$  y  $P_t$  son los precios en los instantes de tiempo  $t - 2$  y  $t$ , respectivamente.

- (a) (5 puntos) Encuentra la ecuación en diferencias lineal y de orden 2 que satisfacen los precios de equilibrio.  
*Nota:* Los precios de equilibrio satisfacen  $D_t = S_t$  para todo  $t$ .
  - (b) (5 puntos) Halla la solución general de la ecuación en diferencias del apartado anterior (a).
  - (c) (5 puntos) Halla la solución de la ecuación en diferencias del apartado (a) anterior que satisface las condiciones iniciales  $P_0 = 40$ ,  $P_1 = 20$ .
  - (d) (5 puntos) Determina el precio de equilibrio máximo y el precio de equilibrio mínimo.
-

2

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones en diferencias

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (5 puntos) Encontrar el punto de equilibrio y clasificarlo (inestable, estable, localmente asintóticamente estable o globalmente asintóticamente estable).
  - (b) (5 puntos) Hallar la solución general del sistema.
  - (c) (5 puntos) Hallar la solución del sistema que cumple las condiciones iniciales  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 8$  y  $z_0 = 2$ .
-

3

Responda las siguientes cuestiones.

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$(t + 1)x' + x = t(t + 1).$$

(b) (5 puntos) Encontrar la solución de la EDO

$$(t + 1)x' + x = t(t + 1)$$

que satisface  $x(0) = x(1)$ .

---

4

Halle la solución general de la EDO

$$x'' - x' = e^{at},$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ , en los siguientes casos:

- (a) (5 puntos) Cuando  $a = 0$ .
  - (b) (5 puntos) Cuando  $a = 1$ .
  - (c) (5 puntos) Cuando  $a \neq 0$  y  $a \neq 1$ .
-

5

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Encuentra y clasifica el punto de equilibrio. Esboza el diagrama de fases.

---