UC3M
Temas de Matemáticas Avanzadas para la Economía
Final, 17 de enero de 2023 **RESUELTO**

$\boxed{1}$

Se considera un mercado con un sólo bien en el que en cada instante de tiempo t la demanda es $D_t = 100 - P_t$ y la oferta es $S_t = P_{t-2}$, donde P_{t-2} y P_t son los precios en los instantes de tiempo $t-2$ y t, respectivamente.

(a) (5 puntos) Encuentra la ecuación en diferencias lineal y de orden 2 que satisfacen los precios de equilibrio. *Nota:* Los precios de equilibrio satisfacen $D_t = S_t$ para todo t.

(b) (5 puntos) Halla la solución general de la ecuación en diferencias del apartado anterior (a).

(c) (5 puntos) Halla la solución de la ecuación en diferencias del apartado (a) anterior que satisface las condiciones iniciales $P_0 = 40$, $P_1 = 20$.

(d) (5 puntos) Determina el precio de equilibrio máximo y el precio de equilibrio mínimo.

Solución:

(a) $D_t = S_t$ es equivalente a $P_t + P_{t-2} = 100$.

(b) La ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$, con soluciones complejas $\pm i$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es $C_1 \cos(\frac{\pi}{2}t) + C_2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t)$. Por otra parte, existe una solución particular constante, que debe cumplir $A + A = 100$, luego $A = 50$. La solución general de la ecuación completa del apartado (a) es

$$P_t = C_1 \cos(\frac{\pi}{2}t) + C_2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) + 50.$$

(c) Debemos resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} 40 &= C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0 + 50 = C_1 + 50, \\ 20 &= C_1 \cos(\frac{\pi}{2}) + C_2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + 50 = C_2 + 50, \end{aligned}$$

luego $C_1 = -10$ y $C_2 = -30$. En consecuencia, la solución que cumple las condiciones iniciales es

$$P_t = -10 \cos(\frac{\pi}{2}t) - 30 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) + 50.$$

(d) Notar que

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{2}t) = 1, \text{ y } \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) = 0, &\text{ para todo } t = 0, 4, 8, 12, \ldots, \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) = 0, \text{ y } \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) = 1, &\text{ para todo } t = 1, 5, 9, 13, \ldots, \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) = -1, \text{ y } \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) = 0, &\text{ para todo } t = 2, 6, 10, 14 \ldots, \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) = 0, \text{ y } \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) = -1, &\text{ para todo } t = 3, 7, 11, 15, \ldots, \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} P_t &= 40, \text{ para todo } t = 0, 4, 8, 12, \ldots, \\ P_t &= 20, \text{ para todo } t = 1, 5, 9, 13, \ldots, \\ P_t &= 60, \text{ para todo } t = 2, 6, 10, 14 \ldots, \\ P_t &= 80, \text{ para todo } t = 3, 7, 11, 15, \ldots. \end{aligned}$$

La solución es un ciclo de orden 4. El precio máximo es 80 y el precio mínimo es 20.

$\boxed{2}$

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones en diferencias

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (5 puntos) Encontrar el punto de equilibrio y clasificarlo (inestable, estable, localmente asintóticamente estable o globalmente asintóticamente estable).

(b) (5 puntos) Hallar la solución general del sistema.

(c) (5 puntos) Hallar la solución del sistema que cumple las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = 8$ y $z_0 = 2$.

Solución:

(a) El punto de equilibrio es una solución constante del sistema, luego satisface

$$\begin{array}{rcrrrr} x & = & -x & & +\frac{3}{2}z & +1 \\ y & = & x & +\frac{1}{2}y & -z & +3 \\ z & = & -\frac{1}{2}x & & +z & +1. \end{array}$$

De la tercera ecuación se obtiene $x^0 = 2$ y sustituyendo este valor en la segunda, $z^0 = 2$. Finalmente, de la segunda ecuación tenemos $y^0 = 6$. Luego el punto de equilibrio es $(2, 6, 2)$.

La estabilidad del punto de equilibrio se estudia conociendo los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $p_A(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{2})(-(1+\lambda)(1-\lambda) + \frac{3}{4})$. El segundo de los factores es $\lambda^2 - 1 + \frac{3}{4} = \lambda^2 - \frac{1}{4}$. Luego, los valores propios de A son $\frac{1}{2}$, doble, y $-\frac{1}{2}$, simple. Ambos son menores que 1 en valor absoluto, luego el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable.

(b) Veamos que la matriz A definida en el apartado anterior es diagonalizable. Para ello hallamos el rango de la matriz $A - \lambda I_3$ cuando $\lambda = \frac{1}{2}$. La matriz $A - \frac{1}{2}I_3$ es

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

que tiene rango 1. Luego hay dos vectores propios independientes asociados al valor propio doble $\lambda = \frac{1}{2}$ y, por tanto, la matriz A es diagonalizable. Calculemos ahora los vectores propios.

El subespacio propio $S(\frac{1}{2})$ se obtiene al resolver

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $(x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$ son todas las soluciones, luego tomamos como representantes los vectores $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$.

El subespacio propio $S(-\frac{1}{2})$ se obtiene al resolver

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(La matriz es $A - (-\frac{1}{2})I_3)$). Se obtiene $x = 3z$ y entonces $y = -2z$, luego las soluciones son de la forma $(3z, -2z, z) = z(3, -2, 1)$, por lo que podemos tomar como representante al vector $(3, -2, 1)$. Podemos pues escribir la solución general del sistema:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Imponemos que se cumplan las condiciones iniciales, lo cual determinará el valor de las constantes C_1, C_2 y C_3. Seleccionamos $t = 0$ en la solución general hallada en el apartado anterior y utilizamos los valores de x_0, y_0 y z_0 dados en el enunciado para obtener el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo, se obtiene $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ y $C_3 = -1$. Luego, la solución requerida es:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

$\boxed{3}$

Responda las siguientes cuestiones.

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$(t+1)x' + x = t(t+1).$$

(b) (5 puntos) Encontrar la solución de la EDO

$$(t+1)x' + x = t(t+1)$$

que satisface $x(0) = x(1)$.

Solución:

(a) Escribimos primero la ODE en la forma $x' + \frac{x}{t+1} = t$. Uno de los métodos de solución de las EDOs lineales explicados en clase consiste en calcular

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t+1}\,dt} = t+1$$

y multiplicar la EDO por $\mu(t)$, transformándola en

$$\left(x' + \frac{x}{t+1}\right)(t+1) = t(t+1) \quad \Rightarrow \quad (x(t+1))' = t(t+1) \quad \Rightarrow \quad x(t+1) = \int t(t+1)\,dt.$$

Luego, tras resolver la integral y despejar, la solución general es

$$x(t) = \frac{C}{t+1} + \frac{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}{t+1}.$$

(b) Usando la solución general hallada en el apartado anterior, $x(0) = x(1)$ significa

$$\frac{C}{t+1} + \frac{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}{t+1}\Bigg|_{t=0} = \frac{C}{t+1} + \frac{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}{t+1}\Bigg|_{t=1},$$

es decir, $C = \frac{C}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$, luego $C = \frac{5}{6}$. La solución buscada es

$$x(t) = \frac{5}{6(t+1)} + \frac{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}{t+1}.$$

$\boxed{4}$

Halle la solución general de la EDO

$$x'' - x' = e^{at},$$

donde $a \in \mathbb{R}$, en los siguientes casos:

(a) (5 puntos) Cuando $a = 0$.

(b) (5 puntos) Cuando $a = 1$.

(c) (5 puntos) Cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Solución:

La ecuación homogénea tiene solución general $C_1 + C_2 e^t$.

(a) Cuando $a = 0$, la ecuación es $x'' - x' = 1$. Dado que las constantes son solución de la EDO homogénea, una particular de la EDO completa será de la forma $x_p(t) = At$. El coeficiente A lo hallamos de $1 = x_p'' - x_p' = -A$, luego $A = -1$. La solución general de la completa es

$$C_1 + C_2 e^t - t.$$

(b) Cuando $a = 1$, la ecuación es $x'' - x' = e^t$. Dado que e^t es solución de la EDO homogénea, una particular de la EDO completa será de la forma $x_p(t) = Ate^t$. Calculamos

$$x_p' = A(t+1)e^t$$
$$x_p'' = A(t+2)e^t.$$

Al imponer que x_p sea solución, tenemos la ecuación

$$e^t = x_p'' - x_p' = A(t+2)e^t - A(t+1)e^t,$$

que se cumple para todo t si $A = 1$. La solución general de la EDO completa es

$$C_1 + C_2 e^t + te^t.$$

(c) Cuando a no es 0 ni 1, la ecuación es $x'' - x' = e^{at}$, donde e^{at} no es solución de la EDO homogénea. Una solución particular de la EDO completa será de la forma $x_p(t) = Ae^{at}$. Calculamos

$$x_p' = aAe^{at}$$
$$x_p'' = a^2 Ae^{at}.$$

Al imponer que x_p sea solución, tenemos la ecuación

$$e^{at} = x_p'' - x_p' = a^2 Ae^{at} - aAe^{at},$$

De donde se deduce que $A = 1/(a^2 - a)$. La solución general de la EDO completa es

$$C_1 + C_2 e^t + \frac{1}{a^2 - a} e^{at}.$$

$\boxed{5}$

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' &= -2x - y \\ y' &= x - 2y \end{cases}$$

Encuentra y clasifica el punto de equilibrio. Esboza el diagrama de fases.

Solución:

El punto de equilibrio es $(0,0)$. El polinomio característico de la matriz del sistema, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, es $p_A(\lambda) = (2+\lambda)^2 + 1$, cuyas raíces cumplen $2 + \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, luego las raíces son $-2+i$ y $-2-i$, ambas con parte real negativa. En consecuencia, el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable y es una espiral atractiva.