$\boxed{1}$

Se considera un mercado con un sólo bien en el que en cada instante de tiempo t, la demanda es $D = 9 - P_t$ y la oferta $S = P_{t-1} + \frac{1}{4}P_{t-2}$, donde P_{t-2}, P_{t-1} y P_t son los precios en los instantes de tiempo $t-2$, $t-1$ t t, respectivamente. Encontrar los precios de equilibrio P_t si $P_0 = 6$ y $P_1 = 2$.

Pista: Los precios de equilibrio satisfacen $D = S$ para todo t.

Solución:

$D = S$ is equivalent to $P_t + P_{t-1} + \frac{1}{4}P_{t-2} = 9$. The general solution of the homogeneous equation is $C_1(-2)^{-t} + C_2t(-2)^{-t}$. A particular solution is 4. Thus

$$P_t = C_1(-2)^{-t} + C_2t(-2)^{-t} + 4.$$

The particular solution satisfying $P_0 = 6$, $P_1 = 2$ is with $C_1 = 2$ y $C_1 = 2$.

$\boxed{2}$

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2a \\ b & -a & 3a \end{pmatrix},$$

donde $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$.

(a) (5 puntos) Calcular los valores propios de A ¿Para qué valores de los parámetros a y b es la matriz A diagonalizable?

(b) (5 puntos) Calcular los vectores propios de A y escribir la forma diagonal de A y la matriz P cuando A sea diagonalizable.

Solución:

(a) $p_A(\lambda) = (a - \lambda)\big(- \lambda(3a - \lambda) + 2a^2\big)$. The second factor has roots

$$\lambda = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{2} = \frac{3a \pm a}{2}.$$

The eigenvalues are $\lambda = a$ double, $\lambda = 2a$ simple. The rank of $A - aI$ is 1 if and only if $b = -2$ (remember that $a \neq 0$). Thus, A is diagonalizable for all $a > 0$ if and only if $b = -2$.

(b) Let $b = -2$. $S(a)$ is generated by $(0, 2, 1)$ and $(a, 0, 1)$.

To prove this, note that

$$A - 2aI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -a & 2a \\ -2 & -a & 2a \end{pmatrix}.$$

Hence, $(x, y, z) \in S(a)$ iff $-2x - ay + 2az = 0$. If $x = 0$, then $y = 2z$. If $y = 0$, then $x = az$. Thus

$$S(a) = \{t(0, 2, 1) + s(a, 0, 1) \,:\, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

$S(2a)$ is generated by $(0, 1, 1)$. To prove this, note that

$$A - 2aI = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ -2 & -2a & 2a \\ -2 & -a & a \end{pmatrix}.$$

Hence, $(x, y, z) \in S(2a)$ iff $x = 0$ and $y = z$. Thus $S(2a) = \{t(0, 1, 1) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{3}$

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones en diferencias

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2a \\ b & -a & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $a > 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$, $a \neq 1$. Observe que la matriz del sistema es la matriz A del Problema 2.

(a) (5 puntos) Encontrar el punto de equilibrio y determinar los valores de $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es GAE (si existen).

(b) (5 puntos) Hallar la solución general del sistema para los valores de a y b para los que la matriz A es diagonalizable.

Solución:

(a) The vector

$$\frac{1}{1-3a+2a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$$

is the only equilibrium point. Since the eigenvalues are $2a$ and a, with $a > 0$, the equilibrium point is GAS if and only if $0 < a < \frac{1}{2}$.

(b) A is diagonalizable iff $b = -2$. The solution is

$$C_1 a^t (0,2,1)^T + C_2 (2a)^t (a,0,1)^T + C_3 (2a)^t (0,1,1)^T + \frac{1}{1-3a+2a^2}(0,2a,1)^T,$$

where ^{T} indicates transpose and C_i, $i = 1,2,3$, are arbitrary constants.

$\boxed{4}$

Responda las siguientes cuestiones.

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x' - t^2 x = t^2.$$

(b) (5 puntos) Encontrar la solución de la EDO

$$x' - t^2 x = t^2$$

que satisface $x(0) = x(1)$.

Solución:

(a)

$$(x' - t^2 x)e^{-\int t^2 dt} = t^2 e^{-\int t^2 dt}$$

$$\left(x e^{-\int t^2 dt}\right)' = t^2 e^{-\int t^2 dt} \;\Rightarrow\; \left(x e^{-t^3/3}\right)' = t^2 e^{-t^3/3},$$

Hence

$$x e^{-t^3/3} = \int t^2 e^{-t^3/3} dt = -e^{-t^3/3} + C.$$

Thus, $x(t) = -1 + Ce^{t^3/3}$.

(b) $x(0) = x(1)$ implies $C = 0$, hence $x(t) = -1$ for all t.

$\boxed{5}$

Se considera la EDO

$$(1 + t + 2x)e^{2t}dt + 2e^{2t}dx = 0.$$

Encontrar la solución general y calcular $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Solución:

The equation is not exact, but e^{-t} is an integrating factor. The solution is found after an integration by parts. From $V_x = 2e^t$ one gets $V = 2xe^t + g(t)$ and then $2xe^t + g'(t) = V_t = e^t(1 + t + 2x)$, from which

$$g'(t) = (1 + t)e^t \;\Rightarrow\; g(t) = te^t.$$

The solution is given by

$$(t + 2x)e^t = C \quad \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\left(Ce^{-t} - t\right).$$

The limit is $-\infty$, independently of C.

$\boxed{6}$

Responda las siguientes cuestiones.

(a) (5 puntos) Se considera la EDO lineal y de segundo orden

$$x'' - ax' + bx = te^t,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Hallar a y b si se sabe que $x(t) = te^t$ es solución de la ecuación. Justifique la respuesta.

(b) (5 puntos) Encontrar la solución del problema de Cauchy

$$x'' - 2x' + 2x = te^t, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$$

Solución:

(a) $x' = e^t(t+1)$, $x'' = e^t(t+2)$. Hence

$$(t+2)e^t - a(t+1)e^t + bte^t = te^t$$

and matching coefficients we obtain $a = b = 2$.

(b) $x(t) = e^t(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t) + te^t$ is the general solution. This is because by (a), te^t is a particular solution of the complete ODE, and the equation $r^2 - 2r + 2 = 0$ has complex solutions $1 \pm i$.

$x(t) = e^t(\cos t - 3 \operatorname{sen} t) + te^t$ is the particular solution satisfying the initial conditions.