# UC3M

**Temas de Matemáticas Avanzadas para la Economía**
**Examen Final 21 de enero de 2021** **RESUELTO**

$\boxed{1}$

Se considera la ecuación en diferencias de segundo orden

$$x_{t+2} + x_{t+1} + \frac{1}{4}x_t = 1.$$

(a) (5 puntos) Encuentre la solución general.

(b) (5 puntos) Encuentre la solución del problema de valores iniciales

$$x_{t+2} + x_{t+1} + \frac{1}{4}x_t = 1, \qquad x_0 = -1, x_1 = 1.$$

(c) (5 puntos) Considere el problema de valores iniciales

$$x_{t+2} + x_{t+1} + \frac{1}{4}x_t = 1, \qquad x_0 = -1, x_1 = 1,$$

resuelto en el apartado anterior. ¿Qué valor toma $x_3$?

---

**Solución:**

(a) La ecuación característica es $(r + \frac{1}{2})^2 = 0$, que tiene la raíz doble $-\frac{1}{2}$. La solución general de la ecuación homogńea es $x_t^h = C_1(-2)^{-t} + C_2 t(-2)^{-t}$. Buscamos una solución particular constante de la completa, $y_t = A$, dado que 1 no es ra'i z de la ecuación característica. Al imponer esta solución, encontramos el valor $A = \frac{4}{9}$. Luego

$$x_t = C_1(-2)^{-t} + C_2 t(-2)^{-t} + \frac{4}{9}.$$

(b) $C_1 = -\frac{13}{9}$ y $C_2 = \frac{3}{9}$ ($\frac{1}{3}$). Es decir

$$x_t = -\frac{13}{9}(-2)^{-t} + \frac{1}{3}t(-2)^{-t} + \frac{4}{9}.$$

(c) Una manera es ir calculando utilizando la fórmula recursivamente: $x_2 = 1 - \ x_1 - \frac{1}{4}x_0 = 1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ and $x_3 = 1 - x_2 - \frac{1}{4}x_1 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Otra manera es utilizando la fórmula de la solución:

$$x_3 = -\frac{13}{9}(-2^{-3}) + \frac{3}{9}(-3 \cdot 2^{-3}) + \frac{4}{9} = \frac{13 - 9 + 32}{9 \cdot 8} = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{2}$

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix},$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) (5 puntos) ¿Para qué valores del parámetro $a$ es la matriz $A$ diagonalizable?

(b) (10 puntos) Calcular los valores y los vectores propios de $A$. Escribir la forma diagonal de $A$ y la matriz $P$ cuando $A$ es diagonalizable.

---

**Solución:**

(a) El polinomio característico es

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left((a-\lambda)^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Sus raíces son $\frac{1}{2}$, $a + \frac{1}{2}$ y $a - \frac{1}{2}$. Por tanto, los autovalores de $A$ son:

- $\lambda = \frac{1}{2}$ (multiplicidad 2) y $\lambda = -\frac{1}{2}$, si $a = 0$;
- $\lambda = \frac{1}{2}$ (multiplicidad 2) y $\lambda = \frac{3}{2}$, si $a = 1$;
- $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = a + \frac{1}{2}$ y $\lambda = a - \frac{1}{2}$, todos de multiplicidad 1, si $a \neq 0$ y $a \neq 1$. En este caso la matriz tiene 3 autovalores distintos, luego $A$ es diagonalizable.

Cuando $a = 0$ o $a = 1$, el rango de $A - \frac{1}{2}I$ es $2 > 1$, luego $A$ no es diagonalizable.

(b) Sea $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

$$S(\frac{1}{2}) = \langle (2a^2 - 2a, 1, 1 - 2a) \rangle, \quad S(a + \frac{1}{2}) = \langle (0, 1, 1) \rangle, \quad S(a - \frac{1}{2}) = \langle (0, -1, 1) \rangle.$$

Luego

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & a + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2a^2 - 2a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 - 2a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el caso $a = 0$, en que $A$ no es diagonalizable, $S(\frac{1}{2}) = \langle (0, 1, 1) \rangle$, $S(-\frac{1}{2}) = \langle (0, -1, 1) \rangle$.

En el caso $a = 1$, en que $A$ no es diagonalizable, $S(\frac{1}{2}) = \langle (0, -1, 1) \rangle$, $S(\frac{3}{2}) = \langle (0, 1, 1) \rangle$.

$\boxed{3}$

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix},$$

donde $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq \frac{3}{2}$. Notar que la matriz del sistema es la matriz $A$ del Problema 2.

(a) (5 puntos) Encontrar los puntos de equilibrio.

(b) (5 puntos) Encontrar todos los valores de $a$ para los que el sistema es GAE.

(c) (10 puntos) Encontrar todos los valores de $a$ para los que el sistema es inestable, pero presenta estabilidad de punto de silla. En caso de que la variedad estable exista, justificar si es una recta o un plano, y si la forma de la variedad estable depende de los valores de $a$. Justifique sus respuestas.

---

**Solución:**

La matriz del sistema es la matriz $A$ del Problema 2, con $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq \frac{3}{2}$. La matriz $A$ tiene autovalroes $\frac{1}{2}$ y $a \pm \frac{1}{2}$. Notar que $a \pm \frac{1}{2} \neq 1$ para todo $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq \frac{3}{2}$.

(a) El equilibrio es $(0, 0, 0)$, dado que el determinante $|I - A| \neq 0$ debido a que 1 no es un autovalor de $A$.

(b) Sabemos del Problema 2 que los autovalores de $A$ son $\frac{1}{2}$ y $a \pm \frac{1}{2}$. Luego, el sistema es GAE sii $|a + \frac{1}{2}| < 1$ y $|a - \frac{1}{2}| < 1$. La primera desigualdad es $a \in (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ y la segunda $a \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Su intersección es $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, luego el sistema es GAE sii $|a| < \frac{1}{2}$.

(c) Cuando $|a| > \frac{1}{2}$, el sistema es inestable, pero presenta estabilidad de punto de silla. Cuando $a = -\frac{1}{2}$ el sistema no es asintóticamente estable, pero presenta estabilidad de punto de silla.

- Cuando $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$, o $a = -\frac{1}{2}$, dos de los autovalores son menores que 1 en valor absoluto, luego existe una variedad estable de dimensión 2, (un plano). Esta variedad estable es un plano que contiene al origen $(0, 0, 0)$ y a los dos autovectores independientes asociados a los autovalores menores que 1 en valor absoluto.
- Cuando $|a| > \frac{3}{2}$ o $a = -\frac{3}{2}$, sólo uno de los autovalores es menor que 1 en valor absoluto, luego existe una variedad estable de dimensión 1, (una recta). Esta variedad estable es una recta que contiene al origen $(0, 0, 0)$ y cuyo vector director es un autovector asociado al autovalor menor que 1 en valor absoluto.

$\boxed{4}$

Responder las siguientes cuestiones.

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' + x' - 12x = 0.$$

(b) (10 puntos) Encontrar la solución general de la EDO

$$x'' + x' - 12x = e^{-4t}(2 - 14t).$$

(c) (5 puntos) Encontrar la solución del siguiente problema de valores iniciales

$$x'' + x' - 12x = e^{-4t}(2 - 14t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -7.$$

(d) (5 puntos) Encontrar la solución del problema

$$x'' + x' - 12x = e^{-4t}(2 - 14t), \quad \lim_{t \to \infty} x(t) = 0, \quad x(0) = 100$$

---

**Solución:**

1. The characteristic equation is $r^2 + r - 12$. The roots are $-4$ and $3$. The general solution is $x(t) = Ae^{-4t} + Be^{3t}$.

2. We look for a particular solution of the form $x(t) = t(C + Dt)e^{-4t}$. We have

$$\begin{aligned} x'(t) &= e^{-4t}(-4Ct + C + 2D(1 - 2t)t) \\ x''(t) &= 2e^{-4t}\left(8Ct - 4C + 8Dt^2 - 8Dt + D\right). \end{aligned}$$

   So,

$$x'' + x' - 12x = e^{-4t}(2D(1 - 7t) - 7C) = e^{-4t}(2 - 14t).$$

   Hence $C = 0$, $D = 1$. The particular solution is $e^{-4t}t^2$. The general solution is

$$x(t) = Ae^{-4t} + Be^{3t} + t^2 e^{-4t}.$$

3. From the general solution, we have

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = 0 \\ x'(0) &= 3B - 4A = -7 \end{aligned}$$

   The solution is $A = 1$, $B = -1$. The solution is

$$e^{-4t}t^2 + e^{-4t} - e^{3t}$$

4. The limit is finite, only if $B = 0$. Consider $x(t) = Ae^{-4t} + t^2 e^{-4t}$ Note that

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

   and $x(0) = A$. Hence, the solution is

$$100e^{-4t} + e^{-4t}t^2$$

$\boxed{5}$

Se considera la EDO

$$3t^2x^2\,dt - e^{\frac{1}{x}}\,dx = 0.$$

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general.

(b) (10 puntos) Encontrar la solución $x(t)$ del problema de valores iniciales

$$3t^2x^2\,dt - e^{\frac{1}{x}}\,dx = 0, \quad x(0) = \frac{1}{\ln 2}.$$

¿Para qué valores de $t$ está definida la solución $x(t)$?

---

**Solución:**

(a) The function

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

is an integrating factor. Multiplying by this integrating factor, we obtain the ODE

$$3t^2\,dt - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx = 0$$

We obtain

$$V = t^3 + e^{\frac{1}{x}}$$

and the general solution is given by

$$t^3 + e^{\frac{1}{x}} = C$$

**Note:** The ODE is also separable.

(b) Plugging in the values $t = 0$, $x = \frac{1}{\ln 2}$ we obtain the equation $e^{\ln 2} = C$. So, $C = 2$. The solution is defined implicitly by

$$t^3 + e^{\frac{1}{x}} = 2$$

Solving for $x$ we have

$$x(t) = \frac{1}{\ln(2 - t^3)}$$

Hence, we need $2 - t^3 > 0$ and $t^3 \neq 1$. That is, $t < 1$. The solution is defined in the interval $(-\infty, 1)$.

$\boxed{6}$

Se considera la EDO

$$tx' + 2x = \frac{\ln t}{t}, \quad t > 0.$$

(a) (5 puntos) Encontrar la solución general.

(b) (5 puntos) Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$tx' + 2x = \frac{\ln t}{t}, \quad x(1) = 0.$$

---

**Solución:**

(a) Let $\mu(t) = e^{\int (2/t)dt} = t^2$ and multiply both sides of the equation by $\mu$ to obtain

$$(x(t)t^2)' = \frac{\ln t}{\cancel{t^2}}\cancel{t^2},$$

hence, integrating

$$x(t)t^2 = \int \ln t \, dt = t \ln t - t + C,$$

where we have used integration by parts to find the expression of the integral ($u = \ln t$, $dv = dt$). Hence,

$$x(t) = \frac{\ln t - 1}{t} + \frac{C}{t^2}.$$

(b) $0 = x(1) = -1 + C$, thus $x(t) = \frac{\ln t - 1}{t} + \frac{1}{t^2}$.