UC3M
Matemáticas Avanzadas para la Economía
Examen Final, 14 de enero de 2020 **RESUELTO**

$\boxed{1}$

Considere la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden

$$x_{t+2} - x_{t+1} + \frac{1}{4}x_t = t.$$

(a) (5 puntos) Halle la solución general.

(b) (5 puntos) Halle una solución de la ecuación anterior que verifique

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Solución:

(a) La ecuación característica es $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, que admite únicamente la raíz $\frac{1}{2}$. La solución general de la ecuación homogénea es $x_t = C_1 2^{-t} + C_2 2^{-t} t$. Ahora buscamos una solución particular de la forma $y_t = At + B$. Substituyendo esta expresión en la ecuación, obtenemos $A = 4$ y $B = -16$. Luego, la solución general es

$$x_t = C_1 2^{-t} + C_2 2^{-t} t + 4t - 16.$$

(b) Del sistema de ecuaciones $C_1 - 16 = 1 = x_0$, $\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 - 12 = 0 = x_1$ obtenemos $C_1 = 17$ y $C_2 = 7$.

$\boxed{2}$

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ -3 & -1 & 3 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $b \in \mathbb{R}$.

(a) (5 puntos) ¿Para qué valores del parámetro b es la matriz A diagonalizable?

(b) (5 puntos) Calcule los valores y vectores propios de A **para el caso** $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Escriba la forma diagonal de A y la matriz P.

Solución:

(a)

(b) El polinomio característico es $-(1+\lambda)(\lambda^2 - b^2)$. Por tanto, los autovalores son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = b$, y $\lambda_3 = -b$.

- $b \neq 0$, $b \neq 1$ y $b \neq -1$. A es diagonalizable, dado que tiene tres autovalores distintos.
- $b = 0$; los autovalores son 0, doble y -1, simple.
- $b = 1$; los autovalores son -1, doble y 1, simple.
- $b = -1$; doble y -1, doble y 1, simple.

En el segunco caso ($b = 0$), $\operatorname{rank}(A - 0I_3) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$. A es diagonalizable.

En el tercer caso ($b = 1$), $\operatorname{rank}(A - (-1)I_3) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. A no es diagonalizable.

En el cuarto caso ($b = -1$), $\operatorname{rank}(A - (-1)I_3) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$. A es diagonalizable.

(c) Cuando $b = \frac{1}{2}$, los autovalores son -1 y $\pm\frac{1}{2}$, luego A es diagonalizable y es fácil obtener los autoespacios:

$$S(-1) = \langle (0,1,0) \rangle, \quad S(\frac{1}{2}) = \langle (1,0,1) \rangle, \quad S(-\frac{1}{2}) = \langle (-1,12,1) \rangle.$$

Luego

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \frac{z_t}{2} + 3 \\ y_{t+1} &= -3x_t - y_t + 3z_t + 2 \\ z_{t+1} &= \frac{x_t}{2} + 3. \end{aligned}$$

Observe que la matriz del sistema es la matriz A del Problema 2 cuando $b = \frac{1}{2}$ (luego A es diagonalizable).

(a) (5 puntos) Compute el punto de equilibrio y estudie su estabilidad.

(b) (5 puntos) Encuentre la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias anterior.

Solución:

La matriz asociada al sistema de ecuaciones en diferencias es la matriz A del Problema 2 con $b = \frac{1}{2}$, luego es una matriz diagonalizable.

(a) El punto de equilibrio satisface:

$$\begin{aligned} x &= \frac{z}{2} + 3 \\ y &= -3x - y + 3z + 2 \\ z &= \frac{1}{2}x + 3, \end{aligned}$$

cuya solución es $(6, 1, 6)$. Hemos probado en el Problema 2 que los autovalores de la matriz son -1, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$. Dado que no todos los autovalores son menores que la unidad en valor absoluto, el sistema no es asintóticamente estable.

(b) El sistema es diagonalizable y la solución está dada por

$$X_t = C_1 \lambda_1^t \mathbf{v}_1 + C_2 \lambda_2^t \mathbf{v}_2 + C_3 \lambda_3^t \mathbf{v}_3 + X^0,$$

donde $X = (x, y, z)'$, C_1, C_2, C_3 son constantes, λ_i son valores propios, $\mathbf{v}_i$ son los vectores propios correspondientes, para $i = 1, 2, 3$, y X^0 es el equilibrio. En el caso que nos ocupa, donde $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$, la solución general es

$$X_t = C_1(-1)^t(0, 1, 0)' + C_2 \frac{1}{2^t}(1, 0, 1)' + C_3 \left(-\frac{1}{2}\right)^t (-1, 12, 1)' + (6, 1, 6)'.$$

(la prima denota vector columna).

$\boxed{4}$

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$x(x-t)\,dt + \left(3xt - t^2 + \frac{1}{x^2}\right)\,dx = 0.$$

(a) (5 puntos) Encuentre la solución general.

(b) (5 puntos) Encuentre la solución que cumple la condición $x(0) = e^2$.

Solución:

(a) La EDO $P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$ no es exacta, dado que

$$P_x = 2x - t \neq 3x - 2t = Q_t.$$

Un factor integrante independiente de t es $\mu(x) = e^{\int \frac{Q_t - P_x}{P}\,dx}$, dado que

$$\frac{Q_t - P_x}{P} = \frac{3x - 2t - (2x-t)}{x(x-t)} = \frac{x-t}{x(x-t)} = \frac{1}{x}$$

es independiente de t. Luego, $\mu(x) = x$ convierte a la ecuación en exacta. Sea

$$x^2(x-t)\,dt + \left(3x^2t - xt^2 + \frac{1}{x}\right)\,dx = 0$$

la nueva EDO. Una función potencial es $V(t,x) = \int x^2(x-t)dt = x^3t - \frac{x^2t^2}{2} + g(x)$; para hallar g, utilizamos que $V_x = 3x^2t - xt^2 + \frac{1}{x}$ para obtener la identidad

$$3x^2t - xt^2 + g'(x) = 3x^2t - xt^2 + \frac{1}{x}.$$

Luego $g(x) = \ln x$. La solución general es

$$x^3t - \frac{x^2t^2}{2} + \ln x = C, \quad C \text{ constant.}$$

(b) $x^3t - \frac{x^2t^2}{2} + \ln x = 2$

$\boxed{5}$

Considere la ecuación diferencial

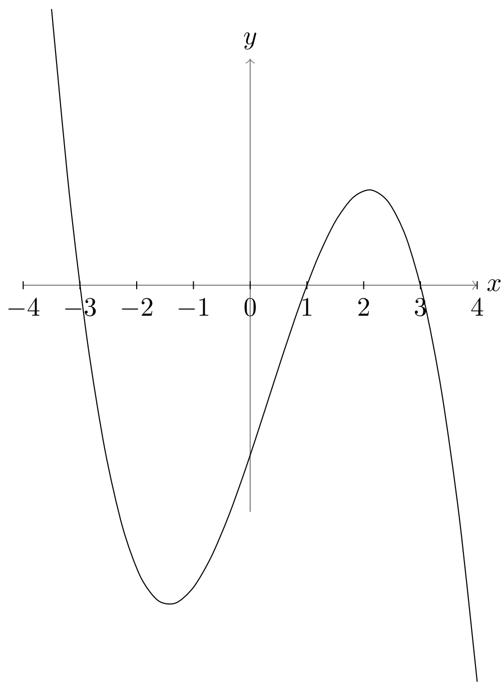
$$x' = \left(1 + \frac{x}{3}\right)(1 - x)(x - 3)$$

(a) (5 puntos) Encuentre los puntos de equilibrio, dibuje el diagrama de fases de la ecuación diferencial y estudie la estabilidad de sus puntos de equilibrio.

(b) (5 puntos) Dibuje la gráfica de la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial anterior que cumple $x(0) = 2$ y encuentre los límites $\lim_{t\to\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.

Solución:

(a) Los puntos de equilibrio son -3, 1 y 3.



Claramente, -3 es no estable, 0 es l.a.e. y 3 es no estable.

(b) $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 3$.

$\boxed{6}$

Considere la ecuación diferencial

$$x'' + 3x' + 2x = e^{-t}.$$

(a) (5 puntos) Halle la solución general.

(b) (5 puntos) Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$ para cualquiera de las soluciones $x(t)$ halladas en el apartado (a) anterior.

Solución:

(a)

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + te^{-t}.$$

(b) Los términos e^{-t} y e^{-2t} tienden a 0. El término $te^{-t} = \frac{t}{e^t}$ converge al mismo límite que $\frac{1}{e^t}$ por la regla de l'Hopital. Luego todas las soluciones tienden a cero a medida que t tiende a infinito.