

1

Encuentre la solución de la siguiente ecuación en diferencias con condiciones iniciales

$$x_{t+2} + 3x_{t+1} - 4x_t = 15, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = -1.$$

Solución:

The characteristic equation is $r^2 + 3r - 4 = 0$, whose roots are 1 and -4 . Thus the general solution of the associated homogeneous equation is

$$x_t^h = C_1 + C_2(-4)^t$$

Since 1 is a root of characteristic equation we look for a particular solution of the form $x_t^p = At$. Substituting this form of x_t^p into the equation we find that $A = 3$. Thus, the general solution is

$$x_t^g = C_1 + C_2(-4)^t + 3t$$

Plugging the values $t = 0$ and $t = 1$ we get the following system of linear equations

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ -1 &= C_1 + -4C_2 + 3 \end{aligned}$$

whose solution is $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Hence the solution is

$$x_t = (-4)^t + 3t$$

2

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ a^2 - \frac{a}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

- (a) (10 points) Determine todos los valores del parámetro a para los que la matriz A es diagonalizable.
 - (b) (10 points) Para aquellos valores del parámetro a para los que la matriz A es diagonalizable, escriba su forma diagonal.
-

Solución:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

The matrix is diagonalizable for every value of $a \in \mathbb{R}$.

3

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= ax_t + 1 \\y_{t+1} &= \frac{y_t}{2} + 1 \\z_{t+1} &= \left(a^2 - \frac{a}{2}\right)x_t + \frac{z_t}{2}\end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 1$.

- (a) (5 points) Determine el punto de equilibrio del sistema de ecuaciones en diferencias.
 - (b) (10 points) Halle la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias.
 - (c) (5 points) Determine los valores de a para los que el sistema es globalmente asintóticamente estable. Para aquellos valores de a para los que el sistema de ecuaciones en diferencias es globalmente asintóticamente estable, halle el límite de las trayectorias solución cuando $t \rightarrow \infty$.
-

Solución:

1. The equilibrium point is

$$x^0 = \left(\frac{1}{1-a}, 2, \frac{2a^2-a}{a-1}\right)$$

2. The matrix associated to the system of difference equations is the matrix A of the previous exercise. Thus, the general solution is

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = c_1 a^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \frac{c_2}{2^t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c_3}{2^t} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} \\ 2 \\ \frac{2a^2-a}{a-1} \end{pmatrix}$$

3. The system of difference equations is globally asymptotically stable for the values $|a| < 1$. For those values of a we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} \\ 2 \\ \frac{2a^2-a}{a-1} \end{pmatrix}.$$

4

Halle la solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\dot{x} - x = -t, \quad x(0) = x_0.$$

Solución:

Multiplying the equation by e^{-t} it becomes

$$\frac{d}{dt} (e^{-t}x) = -te^{-t}$$

So,

$$e^{-t}x = te^{-t} + e^{-t} + A$$

Plugging in $t = 0$, $x(0) = x_0$ we obtain $x_0 = 1 + A$. Hence,

$$x(t) = t + 1 + (x_0 - 1)e^t$$

5

- (a) (5 points) Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$x'' - x' - 6x = 16te^{-t}$$

- (b) (5 points) Halle la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial anterior que satisface las condiciones iniciales

$$x(0) = 4, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

Solución:

1. The characteristic equation is $r^2 - r - 6 = 0$ whose roots are -2 and 4 . Hence, the general solution of the associated homogeneous equation is

$$x^h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}$$

We look now for a particular solution of the form

$$y(t) = (A + Bt)e^{-t}$$

Thus,

$$\begin{aligned} y'(t) &= (A - B + Bt)e^{-t} \\ y''(t) &= (A - 2B + Bt)e^{-t} \\ y'' - y' - 6y &= (4A + 3B + 4Bt)e^{-t} \end{aligned}$$

and we obtain $A = 3$, $B = -4$. Hence, the general solution is

$$x^g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t} + (3 - 4t)e^{-t}$$

2. Since, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ we must have $c_2 = 0$. And since $x(0) = 4$ we have that $4 = c_1 + 3$ and we obtain that $c_1 = 1$. Hence, the solution is

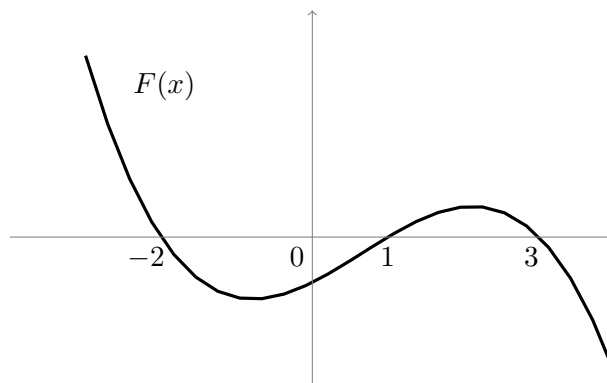
$$x(t) = e^{-2t} + (3 - 4t)e^{-t}$$

6

Se considera la ecuación diferencial autónoma y de primer orden

$$x' = F(x),$$

donde la gráfica de la función F se muestra en la figura.



(a) (10 points) Determine y clasifique los puntos de equilibrio.

(b) (5 points) Sea $x(t)$ la solución del siguiente problema con valor inicial

$$x' = F(x), \quad x(0) = -3$$

1. Justifique si $x(t)$ es creciente o decreciente.

2. Calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$.

3. Haga un esbozo de la gráfica de $x(t)$.

(c) (5 points) Sea $x(t)$ la solución del siguiente problema con valor inicial

$$x' = F(x), \quad x(0) = 0$$

1. Justifique si $x(t)$ es creciente o decreciente.

2. Calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$.

3. Haga un esbozo de la gráfica de $x(t)$.

(d) (5 points) Sea $x(t)$ la solución del siguiente problema con valor inicial

$$x' = F(x), \quad x(0) = 1$$

1. Justifique si $x(t)$ es creciente o decreciente.

2. Calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$.

3. Haga un esbozo de la gráfica de $x(t)$.

(e) (5 points) Sea $x(t) = 4e^t$. Discuta si esta función podría ser o no solución del siguiente problema con valor inicial

$$x' = F(x), \quad x(0) = 4$$

Solución:

- (a) The stationary points are -2 (lae), 1 (unstable) and 3 (lae).
- (b)
 - 1. $x(t)$ is increasing.
 - 2. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -2$ and $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty$.
 - 3.
- (c)
 - 1. $x(t)$ is decreasing.
 - 2. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -2$ and $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$.
 - 3.
- (d)
 - 1. $x(t) = 1$ for all values of t .
 - 2. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$.
 - 3.
- (e) $x(t) = 4e^t$ cannot be a solution, since any solution with $x(0) > 3$ must be decreasing, but $4e^t$ is increasing.