TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

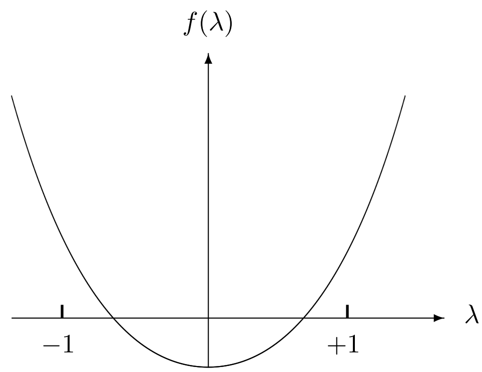
Hoja 4. Ecuaciones en diferencias (3)

Soluciones

4-1. *Demuestra la equivalencia de las dos afirmaciones siguientes:*
(a) *La raíces de la ecuación cuadrática* $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ *satisfacen* $|\lambda| < 1$*;*
(b) $|p| < 1 + q$ *y* $q < 1$ *(*Condición de Jury*).*

Solución: The function $f(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + q$ is a convex parabola. Let us distinguish two different cases.

- Complex roots. This happens when $q > p^2/4$ (so $q > 0$). The roots are
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\Big(p \pm i\sqrt{4q - p^2}\Big),$$
with modulus $|\lambda_{1,2}| = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q - p^2} = \sqrt{q}$. Hence (b) implies (a). Now, to prove the reverse, suppose that (a) holds. Then, $q < 1$. On the other hand, as $f(\lambda) > 0$ for all λ, $f(1) = 1 - p + q > 0$ and $f(-1) = 1 + p + q > 0$. These inequalities are equivalent to $|p| < 1 + q$, hence (a) implies (b).
- Real roots. This happens when $q \leq p^2/4$. Note in the drawing below that $\lambda_{1,2} \in (-1, 1)$ if and only if $f(1) = 1 - p + q > 0$, $f(-1) = 1 + p + q > 0$, $f'(-1) = 2 - p > 0$ and $f'(1) = 2 + p < 0$. The first two inequalities give $|p| < 1 + q$ and the second ones $|p| < 2$. They are equivalent to $|p| < 1 + q$ and $q < 1$.



4-2. *Encuentra el intervalo de valores del parámetro* a *para los que el sistema*
$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$
es globalmente asintóticamente estable. Encuentra (si existe) la variedad estable para los valores $a = -5/3$ *y* $a = 5/2$.

Solución: We will apply the Jury condition proved in the problem above. The characteristic polynomial of the matrix of the system is
$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + \frac{1}{2})\lambda + 1 + \frac{a}{2}.$$
Here, $p = a + \frac{1}{2}$ and $q = 1 + \frac{a}{2}$. The roots are smaller than 1 in module iff $|p| < 1 + q$ and $q < 1$. The second inequality gives
$$1 + \frac{a}{2} < 1 \Rightarrow a < 0.$$
The first inequality can be decomposed into
$$a + \frac{1}{2} < 2 + \frac{a}{2} \Rightarrow a < 3$$
and
$$-\left(a + \frac{1}{2}\right) < 2 + \frac{a}{2} \Rightarrow a > -\frac{5}{3}.$$
Thus, the system is g.a.s. iff $-\frac{5}{3} < a < 0$.

To answer the other questions, suppose first that $a = -5/3$. In this case the eigenvalues are -1 and $-1/6$. The stable manifold is the eigenspace $S(-1/6)$. It is easy to find

$$S(-1/6) = \{(x, y) \,:\, 3x + y = 0\}.$$

Thus, trajectories with initial conditions $3x_0 + y_0 = 0$ converge to the equilibrium point $(0, 0)$. When $a = 5/2$ there is a double eigenvalue, $\lambda = 3/2 > 1$, thus there is no stable manifold.

4-3. *Una empresa comienza su actividad con 100 máquinas de la misma antigüedad. Tras dos años de trabajo, las máquinas dejan de ser útiles y deben reemplazarse por otras nuevas. Además, se sabe que un 11% de las máquinas sufren una avería tras el primer año y deben ser reemplazadas. Escriba las ecuacione del sistema dinámico que describe la evolución de la maquinaria de la empresa.*

Solución: Denote by x_t the percentage of machines of age 0 at time t, y_t the percentage of machines of age 1 at time t and z_t the percentage of machines of age 2 at time t. The dynamics is

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= z_t + 0.11 y_t, \\ y_{t+1} &= x_t, \\ z_{t+1} &= y_t - 0.11 y_t = 0.89 y_t. \end{aligned}$$

The matrix of the system is

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.11 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.89 & 0 \end{pmatrix}.$$

4-4. *Consideramos una versión determinista de un modelo de transmisión de la desigualdad a través de generaciones de Gary Solon*[1] *Los padres invierten I_{t-1} en capital humano de los hijos, h_t, de manera que $h_t = \theta \ln I_{t-1} + g_t$, donde $\theta > 0$ y g_t resume las características genéticas que el hijo recibe de los padres y que es independiente de la inversión (herencia genética). Suponemos que $g_t = \delta + \lambda g_{t-1}$, $0 < \lambda < 1$ (modelo autorregresivo de primer orden). Los ingresos totales del hijo están dados por $\ln y_t = \mu + p h_t$.*

(a) *Interprete los coeficientes θ, λ y p.*
(b) *Supongamos que la inversión de los padres es una proporción constante de sus ingresos, $I_{t-1} = e^k y_{t-1}$, $k \leq 0$. Encuentre una ecuación en diferencias de segundo orden para $\ln y_t$.*
(c) *Demostrar que en este modelo, el logaritmo de los ingresos dependen de manera positiva del de los padres, pero de manera negativa del de los abuelos.*
(d) *Pruebe que la solución nunca es oscilante.*
(e) *Calcule la solución general cuando $\lambda = \gamma$ y demuestre que en este caso los ingresos convergen hacia un valor límite.*

Solución:

(a) θ marginal product for human capital investment; λ heritability coefficient; p earnings return to human capital.
(b) Let $z_t = \ln y_t$. After plugging both human capital and the investment into the equation for $\ln y_t$ we get

$$z_t = \mu^* + \gamma z_{t-1} + p g_t,$$

where $\mu^* = \mu + \gamma k$ and $\gamma = \theta p$. Lagging the equation one period we get

$$z_{t-1} = \mu^* + \gamma z_{t-2} + p g_{t-1}.$$

Multiplying this equation by λ and subtracting to the former equation we obtain

$$z_t = \mu^*(1 - \lambda) + p\delta + (\gamma + \lambda) z_{t-1} - \gamma\lambda z_{t-2}.$$

(c) $\gamma + \lambda > 0$ and $-\gamma\lambda < 0$.
(d) The characteristic equation is

$$r^2 - (\gamma + \lambda) r + \gamma\lambda = 0.$$

The discriminant is $(\gamma + \lambda)^2 - 4\gamma\lambda = (\lambda - \gamma)^2 \geq 0$.
(e) $z_t = C_1 \lambda^t + C_2 t \lambda^t + z^*$, where $z^* = \frac{\mu^*(1-\lambda) + p\delta}{(1-\lambda)^2}$.

[1]Gary Solon. “Theoretical models of inequality transmission across multiple generations”. (18790), February 2013.

4-5. *K es una estudiante con el siguiente hábito de estudio: si estudia un día, la probabilidad de que no estudie al día siguiente es* 0.7. *Por otro lado, la probabilidad de que K no estudie dos días consecutivos es* 0.6. *Suponiendo que K estudia hoy, ¿con qué probabilidad estudiará K en el largo plazo?*

Solución: Let us denote E_t (N_t) the event of studying (not studying) at day t, and by e_t (n_t) the probability of E_t (N_t). Note that $e_t + n_t = 1$ for all t. We have the following data

$$P(N_{t+1}|E_t) = 0.7, \quad P(N_{t+1}|N_t) = 0.6,$$

where $P(A|B)$ means the probability of event A conditioned by event B. Hence $P(E_{t+1}|E_t) = 0.3$ and $P(E_{t+1}|N_t) = 0.4$. Since

$$P(E_{t+1}) = P(E_{t+1}|E_t)P(E_t) + P(E_{t+1}|N_t)P(N_t)$$

we get the difference equation

$$e_{t+1} = 0.3e_t + 0.4n_t.$$

Analogously, we have

$$n_{t+1} = 0.7e_t + 0.6n_t.$$

The eigenvalues of the matrix system $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}$ are $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = -0.1$. The matrix is diagonalizable, with $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}$. It is easy to find that a diagonalization matrix is

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hence, recalling the formula for the solution

$$\begin{pmatrix} e_t \\ n_t \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_0 \\ n_0 \end{pmatrix},$$

where e_0 (n_0) is the probability that K. studies (not study) today. One finds

$$e_t = \frac{1}{11}\lambda_2^t(7e_0 - 4n_0) + \frac{4}{11}(e_0 + n_0) \quad \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{4}{11}(e_0 + n_0).$$

Thus, (e_t, n_t) converges to the stationary distribution $(4/11, 7/11)$ independently of the values of e_0 and n_0, that means that K. will study in the long run with probability 0.3636.

Remark. 1) Note that as $n_t = 1 - e_t$, we can reduce the system to the single equation

$$e_{t+1} = -0.1e_t + 0.4.$$

The equilibrium point is of course $e^* = 4/11$ and the solution converges to e^* since the coefficient of e_t is smaller than 1 in absolute value. The solution is

$$e_t = e^* + (-0.1)^t(e^* - e_0).$$

2) The matrix $A - I$ is not regular. This is the reason why the homogeneous system above has equilibrium points different from $(0,0)$. Note that this case has not been studied in the theory notes. However, the problem can be solved because we can find explicitly the solution.

4-6. *Un experimentador sitúa a un ratón en una jaula que tiene dos puertas, A y B. Al pasar por A, el ratón recibe una pequeña descarga eléctrica, por lo que nunca visita la puerta A dos veces seguidas. Ttras la puerta B se oculta comida. Al principio del experimento (un lunes), el ratón elige A o B con la misma probabilidad. Después de elegir B, la probabilidad de que al día siguiente elija de nuevo B es de* 0.6.

(a) *¿Con qué probabilidad se dirigirá el ratón hacia la puerta A el jueves de la primera semana?*

(b) *¿Cuál es la distribución estacionaria de este experimento?*

(c) *Posiblemente, ¿qué pensará el ratón sobre el experimentador?*

Solución: Denote by a_t (b_t) the probability of choosing door A (B) in day t. We suppose that $a_t + b_t = 1$ for every t, that is, the mouse cannot go out of the jail. The data of the problem says that $a_0 = b_0 = 1/2$ (thus, $t = 0$ corresponds to the first Monday). Then, the probabilities must satisfy (see problem above for details)

$$a_{t+1} = 0a_t + (1 - 0.6)b_t,$$
$$b_{t+1} = a_t + 0.6b_t.$$

The matrix system has eigenvalues $\lambda = 1$ and $\lambda = -0.4$. It is easy to show that a diagonalization matrix is given by

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

The solution is then

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.4)^t \end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

from which

$$a_t = \frac{2}{7} + \frac{3}{14}(-0.4)^t, \qquad t \geq 0.$$

(a) Thursday corresponds with $t = 3$, thus the probability of choosing door A in Thursday is

$$a_3 = 0.272.$$

(b) There exists an stationary distribution, given by the limit

$$\lim_{t\to\infty} a_t = \frac{2}{7} \approx 0.2857.$$

The stationary distribution is to choose door A with probability 2/7 and door B with probability 5/7.

(c) It's a joke.

4-7. ***Curva de Phillips I***.
La curva de Phillips *relaciona negativamente la tasa de crecimiento de los salarios monetarios w y la tasa de desempleo U*

(1) $$w = f(U), \qquad f'(U) < 0.$$

Esta relación fue justificada empíricamente para el Reino Unido por A.W. Phillips en un trabajo muy influyente[2]*. Más tarde, se postuló que dicha relación podía también establecerse entre la tasa de inflación p y la tasa de desempleo, dado que un incremento en los salarios monetarios debería tener efectos inflacionarios*[3]*. Si se tiene en cuenta la productividad laboral, la tasa de inflación es*

$$p = w - T,$$

donde T es el incremento de la productividad laboral, que se considera constante y exógena (hay inflación sólo si los salarios crecen más rápido que la productividad). Suponiendo un forma lineal para la función f, $f(U) = \alpha - \beta U$, tenemos que para todo $t \geq 1$

(2) $$p_t = \alpha - T - \beta U_t, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Por otra parte, la tasa de desempleo puede relacionarse con la tasa de inflación de la siguiente forma:

(3) $$U_{t+1} - U_t = -k(m - p_t), \qquad 0 < k \leq 1,$$

donde m es la tasa de crecimiento de los saldos nominales[4]*. Dado que $m - p$ es la tasa de crecimiento del dinero real en la economía,* (3) *establece que la tasa de crecimiento del desempleo está negativamente relacionada con la tasa de crecimiento de los saldos reales.*

Se pide encontrar una ecuación para U_t y estudiar su estabilidad.

Solución: Substituting the Phillips relation into the equation satisfied by the unemployment rate we get

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - \alpha + T + \beta U_t)$$

and rearranging terms

$$U_{t+1} = (1 - k\beta)U_t - k(m - \alpha + T).$$

The particular solution U^*, that is also the equilibrium point of the equation is given by

$$U^* = (1 - k\beta)U^* - k(m - \alpha + T) \Rightarrow U^* = \frac{\alpha - m - T}{\beta}.$$

As we know, the equation is g.a.s. and converges to U^* as $t \to \infty$ iff

$$|1 - k\beta| < 1 \Leftrightarrow 0 < k\beta < 2.$$

[2]A.W. Phillips (1956) "The relationship between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom," *Economica*, November 1958, pp. 283–299.

[3]La tasa de crecimiento de los salarios es $(W_{t+1} - W_t)/W_t$, donde W_t es el salario en el tiempo t; la tasa de inflación es la tasa de crecimiento de los precios, $p_t = (P_{t+1} - P_t)/P_t$.

[4]Es decir, $m = (M_{t+1} - M_t)/M_t$, donde M_t son los saldos nominales, fijado por la autoridad monetaria, que se supone constante, independiente de t.

Moreover, observe that when $0 < k\beta < 1$, the solution converges monotonically to U^*; when $1 < k\beta < 2$ converges to U^* in a oscillating fashion, since the coefficient of U_t in the difference equation for U is $1-k\beta < 0$, and when $k\beta = 1$ we have an uninteresting case.

4-8. ***Curva de Phillips II.***
Continuando con el modelo de Phillips, analizamos ahora una modificación introducida por M. Friedman[5]*, que es la versión de la curva de Phillips* aumentada por expectativas

(4) $$w = f(U) + g\pi, \qquad (0 < g \leq 1),$$

donde π denota la tasa de inflación esperada. *La idea es que si se ha observado una tendencia inflacionaria suficientemente sostenida, entonces la gente crea ciertas expectativas de que la inflación va a seguir creciendo. Esta creencia afecta a la demanda de salarios.*

Al incorporar este comportamiento en (2)*, resulta la relación*

(5) $$p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t, \quad t \geq 0.$$

Queda por determinar cómo se forman las expectativas sobre la inflación. Es habitual utilizar la hipótesis de expectativas adaptadas

(6) $$\pi_{t+1} - \pi_t = j(p_t - \pi_t), \qquad 0 < j \leq 1.$$

La interpretación es que cuando la tasa de inflación real p supera a la tasa esperada π, ésta, dado que ha sido una estimación demasiado baja, se revisa al alta para el próximo período. Recíprocamente, si p es inferior a π, entonces π se revisa a la baja. La velocidad del ajuste depende de j.

Considera el modelo dado por la ecuaciones (3), (5) *y* (6)*.*
(a) *Elimina p_t y escribe un sistema de ecuaciones en diferencias para las variables (U_t, π_t).*
(b) *Utilizando la condición de Jury, determina si el sistema es g.a.e.*
(c) *Encuentra e interpreta los puntos fijos o soluciones de equilibrio del sistema.*

Solución:
(a) Substituting p_t into (3) and (6) we have

$$\begin{pmatrix} U_{t+1} \\ \pi_{t+1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1-k\beta & kg \\ 1-j(1-g) & -\beta j \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} U_t \\ \pi_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(\alpha - m - T) \\ j(\alpha - T) \end{pmatrix}$$

(b) The characteristic polynomial is

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \overbrace{(2 - j(1-g) - k\beta)}^{p}\,\lambda + \overbrace{(1 - j(1-g) - k\beta(1-j))}^{q}.$$

Recall that the Jury condition assuring that the module of the roots are smaller than 1 is $|p| < 1+q < 2$. Applied to our model obtains

$$|2 - j(1-g) - k\beta| < 2 - j(1-g) - k\beta(1-j) < 2.$$

Note that the second inequality is always true because all the parameters are positive and $0 < g, j \leq 1$. Thus, the condition reduces to

(7) $$|2 - j(1-g) - k\beta| < 2 - j(1-g) - k\beta(1-j).$$

We have two cases to consider.
(i) $2 - j(1-g) - k\beta \geq 0$. Then, the Jury condition is obviously fulfilled.
(ii) $2 - j(1-g) - k\beta < 0$. Then, Eqn. (7) is

$$k\beta(2-j) + 2j(1-g) < 4.$$

Resuming, the system is g.a.s. iff

$$j(1-g) + k\beta \leq 2$$

or

$$j(1-g) + k\beta > 2 \quad \text{and} \quad k\beta(2-j) + 2j(1-g) < 4.$$

To put an example, suppose that $j = g = 0.5$ and consider the product $k\beta$ as the parameter. Then the above two conditions show that the system is g.a.s. iff $k\beta \in (0, \frac{7}{3})$.

[5] M. Friedman (1968) "The role of monetary policy," *American Economic Review*, pp. 1–17.

(c) The fixed point of the system (U^*, π^*) is easily found without resorting to the inverse matrix $(I_2 - A)^{-1}$ as follows. It is clear that in any equilibirum solution, the inflation rate p must be also constant, p^* say. After plugging $U_t = U^*$ into (3) we find

$$0 = -k(m - p^*).$$

Thus, $p^* = m$. The equilibrium rate of inflation is equal to the rate of monetary expansion. In the same way, putting $\pi_t = \pi^*$ into (6)

$$0 = j(p^* - \pi^*).$$

Thus, $\pi^* = p^* = m$, the expected inflation rate is exactly equal to the actual inflation rate. Finally, substituting $U_t = U^*$ into (5) we get

$$p^* = \alpha - T - \beta U^* + gp^*$$

or

$$U^* = \frac{1}{\beta}(\alpha - T - (1 - g)p^*).$$

This is called the *long–run* Phillips relation. As $g \leq 1$, it shows a downward sloping relation between rate of unemployment and inflation rate. When $g = 1$, U^* is independent of p^*. The value of U^* in this case is referred as the *natural rate of unemployment*, which is consistent with any equilibrium rate of inflation.