MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA – 2014/2015

Hoja 3. Ecuaciones en diferencias (2)

3-1. Halla la solución de las ecuaciones (a) $x_{t+2} - \frac{1}{4}x_t = \sin\frac{\pi}{2}t$, $x_0 = 1/2$, $x_1 = 0$; (b) $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = e^{-t} + 1$.

3-2. Estudia la estabilidad de las ecuaciones: (a) $x_{t+1} - \frac{1}{4}x_t = b_t$, (b) $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t = c_t$, donde $\{b_t\}$ y $\{c_t\}$ son sucesiones dadas.

3-3. Resuelve la ecuación de Fibonacci $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$, $x_0 = x_1 = 1$ y comprueba que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \equiv \varphi, \quad \text{la proporción aúrea.}$$

3-4. Considera la ecuación del modelo del multiplicador–acelerador del crecimiento que se obtuvo en las notas de clase

$$Y_{t+2} - a(1+c)Y_{t+1} + acY_t = b,$$

con $a > 0$, $c > 0$ y $a \neq 1$.

(a) Halla una solución particular de la ecuación;

(b) Discute cuándo las soluciones de la ecuación característica son reales o complejas.

(c) Halla la solución general en cada uno de los siguientes casos.

(i) $a = 4$, $c = 1$;

(ii) $a = \frac{3}{4}$, $c = 3$;

(iii) $a = 0.5$, $c = 1$.

3-5. Sea C_t el consumo, K_t el stock de capital y Y_t el producto nacional neto. Se supone que estas tres variables están relacionadas por

$$\begin{aligned} C_t &= cY_{t-1}, \\ K_t &= \sigma Y_{t-1}, \\ Y_t &= C_t + K_t - K_{t-1}, \end{aligned}$$

donce c y σ son constantes positivas.

(a) Da una interpretación económica de las relaciones anteriores.

(b) Halla una ecuación en diferencias de orden dos para Y_t.

(c) Establece condiciones necesarias y suficientes para que Y_t muestre oscilaciones explosivas.

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA – 2014/2015

Hoja 4. Ecuaciones en diferencias (3)

4-1. Demuestra la equivalencia de las dos afirmaciones siguientes:
(a) La raíces de la ecuación cuadrática $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ satisfacen $|\lambda| < 1$;
(b) $|p| < 1 + q$ y $q < 1$ (*Condición de Jury*).

4-2. Encuentra el intervalo de valores del parámetro a para los que el sistema

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

es globalmente asintóticamente estable. Encuentra (si existe) la variedad estable para los valores $a = -5/3$ y $a = 5/2$.

4-3. Una empresa comienza su actividad con 100 máquinas de la misma antigüedad. Tras dos años de trabajo, las máquinas dejan de ser útiles y deben reemplazarse por otras nuevas. Además, se sabe que un 11% de las máquinas sufren una avería tras el primer año y deben ser reemplazadas. Escriba las ecuacione del sistema dinámico que describe la evolución de la maquinaria de la empresa.

4-4. Consideramos una versión determinista de un modelo de transmisión de la desigualdad a través de generaciones de Gary Solon[1] Los padres invierten I_{t-1} en capital humano de los hijos, h_t, de manera que $h_t = \theta \ln I_{t-1} + g_t$, donde $\theta > 0$ y g_t resume las características genéticas que el hijo recibe de los padres y que es independiente de la inversión (herencia genética). Suponemos que $g_t = \delta + \lambda g_{t-1}$, $0 < \lambda < 1$ (modelo autorregresivo de primer orden). Los ingresos totales del hijo están dados por $\ln y_t = \mu + p h_t$.
(a) Interprete los coeficientes θ, λ y p.
(b) Supongamos que la inversión de los padres es una proporción constante de sus ingresos, $I_{t-1} = e^k y_{t-1}$, $k \leq 0$. Encuentre una ecuación en diferencias de segundo orden para $\ln y_t$.
(c) Demostrar que en este modelo, el logaritmo de los ingresos dependen de manera positiva del de los padres, pero de manera negativa del de los abuelos.
(d) Pruebe que la solución nunca es oscilante.
(e) Calcule la solución general cuando $\lambda = \gamma$ y demuestre que en este caso los ingresos convergen hacia un valor límite.

4-5. K es una estudiante con el siguiente hábito de estudio: si estudia un día, la probabilidad de que no estudie al día siguiente es 0.7. Por otro lado, la probabilidad de que K no estudie dos días consecutivos es 0.6. Suponiendo que K estudia hoy, ¿con qué probabilidad estudiará K en el largo plazo?

4-6. Un experimentador sitúa a un ratón en una jaula que tiene dos puertas, A y B. Al pasar por A, el ratón recibe una pequeña descarga eléctrica, por lo que nunca visita la puerta A dos veces seguidas. Ttras la puerta B se oculta comida. Al principio del experimento (un lunes), el ratón elige A o B con la misma probabilidad. Después de elegir B, la probabilidad de que al día siguiente elija de nuevo B es de 0.6.

[1] Gary Solon. "Theoretical models of inequality transmission across multiple generations". (18790), February 2013.

(a) ¿Con qué probabilidad se dirigirá el ratón hacia la puerta A el jueves de la primera semana?
(b) ¿Cuál es la distribución estacionaria de este experimento?
(c) Posiblemente, ¿qué pensará el ratón sobre el experimentador?

4-7. **Curva de Phillips I**.
La *curva de Phillips* relaciona negativamente la tasa de crecimiento de los salarios monetarios w y la tasa de desempleo U

$$w = f(U), \qquad f'(U) < 0. \tag{1}$$

Esta relación fue justificada empíricamente para el Reino Unido por A.W. Phillips en un trabajo muy influyente[2]. Más tarde, se postuló que dicha relación podía también establecerse entre la tasa de inflación p y la tasa de desempleo, dado que un incremento en los salarios monetarios debería tener efectos inflacionarios[3]. Si se tiene en cuenta la productividad laboral, la tasa de inflación es

$$p = w - T,$$

donde T es el incremento de la productividad laboral, que se considera constante y exógena (hay inflación sólo si los salarios crecen más rápido que la productividad). Suponiendo un forma lineal para la función f, $f(U) = \alpha - \beta U$, tenemos que para todo $t \geq 1$

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t, \qquad \alpha, \beta > 0. \tag{2}$$

Por otra parte, la tasa de desempleo puede relacionarse con la tasa de inflación de la siguiente forma:

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - p_t), \qquad 0 < k \leq 1, \tag{3}$$

donde m es la tasa de crecimiento de los saldos nominales[4]. Dado que $m - p$ es la tasa de crecimiento del dinero real en la economía, (3) establece que la tasa de crecimiento del desempleo está negativamente relacionada con la tasa de crecimiento de los saldos reales.

Se pide encontrar una ecuación para U_t y estudiar su estabilidad.

4-8. **Curva de Phillips II**.
Continuando con el modelo de Phillips, analizamos ahora una modificación introducida por M. Friedman[5], que es la versión de la curva de Phillips *aumentada por expectativas*

$$w = f(U) + g\pi, \qquad (0 < g \leq 1), \tag{4}$$

donde π denota la tasa de inflación *esperada*. La idea es que si se ha observado una tendencia inflacionaria suficientemente sostenida, entonces la gente crea ciertas expectativas de que la inflación va a seguir creciendo. Esta creencia afecta a la demanda de salarios.

Al incorporar este comportamiento en (2), resulta la relación

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t + g\pi_t, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Queda por determinar cómo se forman las expectativas sobre la inflación. Es habitual utilizar la hipótesis de *expectativas adaptadas*

$$\pi_{t+1} - \pi_t = j(p_t - \pi_t), \qquad 0 < j \leq 1. \tag{6}$$

[2] A.W. Phillips (1956) "The relationship between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom," *Economica*, November 1958, pp. 283–299.

[3] La tasa de crecimiento de los salarios es $(W_{t+1} - W_t)/W_t$, donde W_t es el salario en el tiempo t; la tasa de inflación es la tasa de crecimiento de los precios, $p_t = (P_{t+1} - P_t)/P_t$.

[4] Es decir, $m = (M_{t+1} - M_t)/M_t$, donde M_t son los saldos nominales, fijado por la autoridad monetaria, que se supone constante, independiente de t.

[5] M. Friedman (1968) "The role of monetary policy," *American Economic Review*, pp. 1–17.

La interpretación es que cuando la tasa de inflación real p supera a la tasa esperada π, ésta, dado que ha sido una estimación demasiado baja, se revisa al alta para el próximo período. Recíprocamente, si p es inferior a π, entonces π se revisa a la baja. La velocidad del ajuste depende de j.

Considera el modelo dado por la ecuaciones (3), (5) y (6).

(a) Elimina p_t y escribe un sistema de ecuaciones en diferencias para las variables (U_t, π_t).
(b) Utilizando la condición de Jury, determina si el sistema es g.a.e.
(c) Encuentra e interpreta los puntos fijos o soluciones de equilibrio del sistema.