TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

Hoja 7. Ecuaciones Diferenciales (3)

7-1. Responde las siguientes cuestiones:

a) Halla la EDO homogénea asociada a la ecuación característica:

1) $r^2 - 3r + 5 = 0$;
2) $r(r+2) = 0$.

b) Halla la EDO homogénea asociada a partir de las raíces de la ecuación característica:

1) $r_1 = 1$, $r_2 = 4$;
2) $r_1 = 3 - 4i$, $r_2 = 3 + 4i$.

c) Halla la EDO homogénea asociada a partir de su solución general:

1) $C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$;
2) $C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$;
3) $e^{-t/2}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t)$.

7-2. Soluciona las siguientes ecuaciones.

a) $x'' - ax = t$, donde $a \in \mathbb{R}$,

b) $x'' - 2x + x = \operatorname{sen} t$, $x(0) = x'(0) = 1$.

c) $x'' - 3x' + 2x = (t^2 + t)e^{3t}$.

7-3. Una ecuación de la forma

$$t^2 x'' + atx' + bx = 0,$$

donde a y b son números reales es una *ecuación de Euler*. Demuestra que el cambio de variable independiente $s = \ln t$ transforma transforma una ecuación de Euler in una lineal de coeficientes constantes para la nueva variable dependiente $y(s) = x(e^s)$. Aplica lo anterior para resolver la ecuación $t^2 x'' - 4tx' - 6x = 0$ for $t > 0$.

7-4. Un activo con riesgo X se revaloriza en media a una tasa exponencial α, pero está sujeto a fluctuaciones aleatorias con volatilidad (desviación típica) instantánea σ. Sea $V(x)$ el valor de un título que tiene como subyacente a X, y que consiste en que el poseedor del título percibe de manera perpetua $x\,dt$ euros cuando es x el precio del activo X. Asumiendo que r es la tasa de interés constante y sin riesgo que existe en la economía, $r < \alpha$, la condición de no arbitraje (no hay posibilidades de hacer dinero partiendo de 0 euros) permite hallar una ecuación diferencial de segundo orden de Euler para el título $V(x)$

$$\frac{\sigma^2}{2} x^2 V''(x) + \alpha x V'(x) - rV(x) = x.$$

Determina la solución general y selecciona aquélla que consideres es la que tiene sentido económico.

7-5. Se supone que las funciones de demanda y de oferta en un mercado con un único bien son

$$\begin{aligned} D(t) &= 42 - 4P(t) - 4\dot{P}(t) + \ddot{P}(t), \\ S(t) &= -6 + 8P(t). \end{aligned}$$

La demanda depende no sólo del precio actual, P, sino también sobre las expectativas sobre su variación instantánea, reflejadas en las derivadas primera y segunda, $\dot{P}$ y $\ddot{P}$. Suponiendo que el mercado está en equilibrio en cada instante de tiempo t, i.e. $D(t) = S(t)$, determinar $P(t)$. Hallar una relación lineal en tre las condiciones iniciales $P(0)$ y $\dot{P}(0)$ de forma que la solución $P(t)$ está acotada.

7-6. Una amante de la naturaleza estudia dos poblaciones vecinas de hormigas rojas y negras. Ha estimado que el número de hormigas negras es de $60,000$ y el de rojas de $15,000$. Las hormigas comienzan a luchar y la entomóloga observa que el número de hormigas muertas de una población es proporcional al número de hormigas vivas de la otra. Sin embargo, las rojas son más agresivas que las negras, de manera que su efectividad en la lucha es cuatro veces las de las negras. La observadora recibe una llamada y debe regresar al campamento base, pensando que ambas poblaciones se extinguirán simultáneamente, dado que las dos especies luchan hasta que una de ellas es completamente aniquilada y dado que las poblaciones están en proporción 4 a 1 para las negras pero la efectividad es de 4 a 1 para las rojas. Las siguientes cuestiones tratan de clarar si nuestra protagonista esá o no en lo cierto.

a) Qué especie sobrevive?
b) Cuántas hormigas de la especie vencedora quedan cuando se extingue la otra especie?
c) Cuál debería haber sido la proporción inicial en las poblaciones para que ambas especies se hubieran extinguido prácticamente a la vez?

Pista: Denotando $x(t)$ = hormigas negras en el tiempo t, $y(t)$ = rojas en el tiempo t (ambas en miles), justifica que la interacción descrita obedece al sistema de EDOs

$$\dot{x}(t) = -4ky(t),$$
$$\dot{y}(t) = -kx(t),$$

donde $k > 0$ es una constante que significa la efectividad en la lucha de las hormigas negras. Este sistema puede convertirse en una EDO de segundo orden para $x(t)$ o para $y(t)$. Una vez hecho esto, resolver y hallar las soluciones sabiendo que $x(0) = 60$ y $y(0) = 15$.

7-7. Se considera la ecuación funcional

$$g(x) + \alpha \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = f(x), \quad \text{para todo } x \geq 0, \tag{1}$$

donde $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada, de claseC^2, $\alpha \neq 0$ es una constante y la función $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función incógnita que queremos determinar, una solución de clase C^2 de la ecuación funcional.

a) Pruebe que si f es solución de (2), entonces satisface la EDO con valores iniciales:

$$f''(x) - \alpha f(x) = g''(x), \quad f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0).$$

b) Utilizando el apartado (a) anterior, encuentre f en los siguientes casos[1]:
1) $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (hay dos casos a considerar, $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$.)
2) $|\alpha| = 1$ y $g(x) = e^{ax}$ (en el caso $\alpha = 1$, distinguir los casos $a = 1$, $a = -1$ y $|a| \neq 1$.)

7-8. Sea $u(x)$ la función de utilidad de un agente cuya riqueza es x. La función u es estrictamente creciente y estrictamente cóncava ($u' > 0$, $u'' < 0$). El índice absoluto de Arrow–Pratt de aversión al riesgo, $r(x)$, depende de la riqueza, y se define como

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

a) Encontrar todas las funciones de aversión al riesgo constante (Constant Relative Risk Aversion en inglés, CARA), i.e. con $r(x) \equiv a > 0$.
b) Encontrar todas las funciones cuyo índice de Arrow–Pratt es inversamente proporcional a la riquea, i.e. $r(x) = a/x$, $a > 0$. Estas funciones se denominan en inglés de Constant Relative Risk Aversion (CRRA). *Pista*: Transformar la EDO de segundo orden en una de primer orden, tomando como nueva incógnita $v(x) = u'(x)$.

[1]Puede probarse que de hecho es la única solución de clase C^2 de (2)