TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

Hoja 6. Ecuaciones Diferenciales (2)

Soluciones

6-1. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.*

a) $\dot{x} = \frac{t^3}{x^3}$.
b) $\dot{x} = \frac{x^3}{t^3}$.
c) $y' = \frac{\sqrt{x+1}}{y^2}$, *con* $y(0) = \frac{5}{3}$.
d) $(t + 3x)\,dt + (t - 20)\,dx = 0$.
e) $(2xy - \cos x)\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$, *con* $y(0) = 0$.
f) $\dot{x} + 2tx = \cos t e^{-t^2}$, *con* $x(0) = 0$.
g) $\dot{x} + \frac{x}{t} = e^{-t^2}$.

Solución:

a) (Separable) $x^4 - t^4 = C$;
b) (Separable) $x^2 - t^2 = Ct^2x^2$;
c) (Separable) $y^3 - 2\sqrt{(x+1)^3} = C$; from $y(0) = 1$ we get $C = -1$, so that $y^3 - 2\sqrt{(x+1)^3} + 1 = 0 \Rightarrow y(t) = \sqrt[3]{2\sqrt{(x+1)^3} - 1}$;
d) (Not exact) An integration factor is

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t-20}\,dt} = e^{\ln (t-20)^2} = (t-20)^2,$$

since

$$\frac{P_x - Q_t}{Q} = \frac{2}{t-20} = \mu(t) \qquad \text{is independent of } x.$$

multiplying the equation by $\mu(t)$ the equation is now exact. Hence, there is a function V such that $V_x = (t-20)^3$; integrating we get $V(t, x) = (t-20)^3x + g(t)$ and deriving with respect to t, $V_t = 3(t-20)^2x + g'(t)$, which has to be equal to $(t-20)^2(t+3x)$, hence we get $g(t) = \int t(t-20)^2dt$. Taking parts $u = t$ and $dv = (t-20)^2$, one gets $g(t) = \frac{1}{12}(t-20)^3(3t+20)$. Hence, $V(t, x) = (t-20)^3x + g(t) = (t-20)^3x + \frac{1}{12}(t-20)^3(3t+20)$, and the solution is $(t-20)^3(12x + 3t + 20) = C$;
e) (Exact) $\sin x - y(x^2 - 1) = C$; from $y(0) = 0$ we get $C = 0$, so that $y(x) = \frac{\sin x}{x^2-1}$.
f) (Linear) Take $\mu(t) = e^{\int 2t} = e^{t^2}$. We know (see the notes of the course)

$$x(t) = \frac{1}{e^{t^2}} \int \cos t e^{-t^2} e^{t^2}\,dt = e^{-t^2}(\sin t + C).$$

Now, the initial condition implies $C = 0$.
g) (Linear) Take $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}} = t$. We know (see the notes of the course)

$$x(t) = \frac{1}{t} \int te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{t}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C\right).$$

6-2. *La ecuación*

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^n$$

se denomina ecuación de Bernoulli. *Es lineal para* $n = 0$ *o* $n = 1$, *es no lineal para* $n \neq 0, 1$. *Supondremos que* $n \neq 0, 1$.

a) *Probar que el cambio de variable* $y = x^{1-n}$ *transforma la ecuación en una lineal para* $y(t)$.
b) *Resolver* $\dot{x} + 2x = x^3$, $x(0) = 2$.

Solución:

a)
$$\dot{y} = (1-n)x^{-n}\dot{x} = (1-n)x^{-n}(-ax+bx^n) = (1-n)(-ax^{1-n}+b) = (1-n)(-ay+b).$$

The linear equation for $y(t)$ is
$$\dot{y} + (1-n)a(t)y = (1-n)b(t),$$
that can be solved with the habitual technique, choosing $\mu(t) = e^{(1-n)\int a(t)\,dt}$.

b) By the item above, the equation is transformed into
$$\dot{y} + 4y = 1$$
thus, $\mu(t) = e^{4t}$ and
$$(\dot{y} + 4y)e^{4t} = e^{4t}$$
implies, after integration
$$ye^{4t} = \int e^{4t}\,dt = \frac{1}{4}e^{4t} + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{4} + Ce^{-4t}.$$
Turning back to the original variable $y = x^{-2}$ we get
$$x^{-2}(t) = \frac{1}{4} + Ce^{-4t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + Ce^{-4t}}}.$$

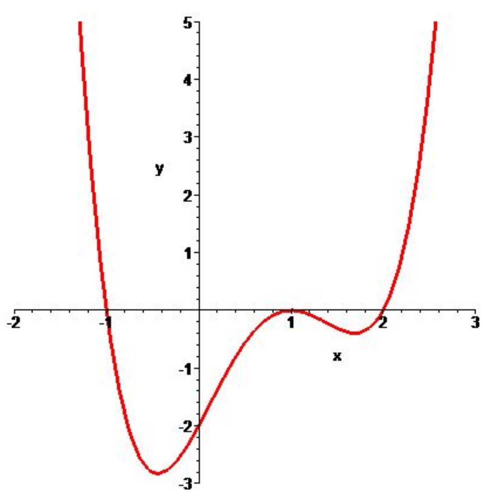
6-3. *Dibujar el diagrama de fases de las dos siguientes ecuaciones, hallar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad.*

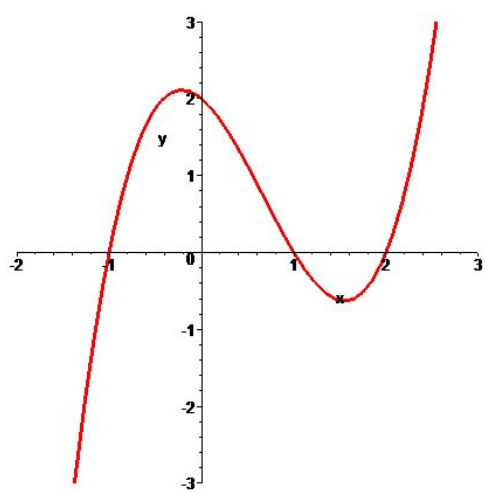
a) $\dot{x} = f(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2)$.
b) $\dot{x} = g(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$

Solución: Equilibrium points are constant solutions of the autonomous differential equation $\dot{x} = f(x)$, that is, solutions of $f(x) = 0$, because this implies $\dot{x} = 0$. In both cases -1, 1 and 2 are the only equilibrium points. To analyze the qualitative behavior of the equation we study the sign of the functions g_1 and g_2.

a) The graph of g_1 shows that it is strictly positive in $(-\infty, 1)$ and strictly negative in $(-1, 2)$ (except at 1), hence any solution $x(t)$ with initial condition x_0 in the interval $(-\infty, -1)$ ($(-1, 2)$) is strictly increasing (decreasing), thus $x(t)$ converges to -1. This equilibrium point is locally asymptotically stable. For the point 1, we see that any solution starting in the interval $(-1, 2)$ is strictly decreasing ($x_0 \neq 1$), thus for initial conditions $-1 < x_0 < 1$, the solution converges to -1, as we already know, and for initial conditions $1 < x_0 < 2$ it converges to 1; the equilibrium point is unstable. A similar analysis shows that 2 is also an unstable point.

b) The points -1 and 2 are unstable and 1 is locally asymptotically stable: any solution with initial condition in the interval $(-1, 2)$ converges to 1.





Graph of $g_1(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2)$ Graph of $g_2(x) = (x+1)(x-1)2(x-2)$

6-4. *En estado natural, la evolución de la población y de una cierta especie de pescado en una determinda área marítima está descrita por la ecuación logística (o de Verhulst)*

$$\dot{y} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y.$$

La pesca de esta especie se dedica a la alimentación. Se supone que la tasa de capturas, $E(y)$, es proporcional a la población existente y. Es decir, $E(y) = Ey$, con E una constante positiva. Entonces, debido a las capturas, la población se rige por la ecuación

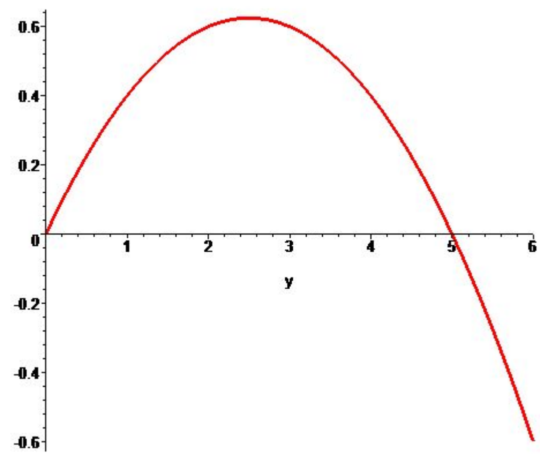
$$\dot{y} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey.$$

Esta ecuación se conoce como modelo de Schaefer.

a) *Probar que si $E < r$, entonces existen dos puntos de equilibrio, y_1=0, $y_2 > 0$;*
b) *Mostrar que y_1 es inestable y que y_2 es asintóticamente estable.*
c) *Se dice que Y es un rendimiento sostenible de la pesquería si Y es una tasa de capturas que puede mantenerse indefinidamente sin que se extinga la población. Se define como Ey_2. Hallar Y como función del esfuerzo de pesca E y dibujar dicha función (se conoce como curva de esfuerzo–rendimiento).*
d) *Determinar E que maximiza Y y encontrar el* el rendimiento sostenible máximo Y_m.

Solución:

a) Solving $\dot{y} = 0$ we find $y_1 = 0$ and $y_2 = \left(1 - \frac{E}{r}\right)K > 0$.
b) The function $f(y) = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey$ is positive in the interval $(0, y_2)$, hence the solutions starting in this interval are increasing and depart from 0 (the fish does not extinguish). On the other hand, f is negative in (y_2, ∞), hence the population of fish decreases to y_2 in this interval.



c) Y satisfies

$$r\left(1 - \frac{y_2}{K}\right)y_2 - Y = 0.$$

Substituting y_2 found above into this expression we have

$$Y = E\left(1 - \frac{E}{r}\right)K.$$

The effort that maximizes Y is obtained from (notice that Y is a concave function of E, hence critical points of Y are automatically global maximum of Y).

$$\frac{\partial Y}{\partial E} = \left(1 - 2\frac{E}{r}\right)K = 0,$$

hence

$$E_m = \frac{r}{2}$$

and

$$Y_m = E_m y_2 = \frac{r}{4}K.$$

6-5. *Se considera el siguiente modelo de crecimiento económico, debido a Haavelmo. El output de la economía viene dado por una función de producción de Cobb–Douglas que presenta rendimientos cosntantes a escala*

$$Y = F(K, L) = AK^a L^{1-a}, \qquad 0 < a < 1,$$

donde K es el stock de capital y L es el nivel de ocupación laboral; la constante es en general $A > 0$, pero tomaremos aquí $A = 1$. Se supone que la tasa a la que se aumenta la fuerza laboral ocupada no es constante, sino que está dada por una función creciente del output per capita, Y/L:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \alpha - \beta\frac{L}{Y} = \alpha - \beta\frac{1}{Y/L}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Observar que el stock de capital, K, se considera constante. *Substituyendo Y en (1) obtenemos la ecuación*

(1)
$$\dot{L} = \alpha L - \beta\frac{L^{1+a}}{K^a}, \qquad L(0) = L_0 > 0.$$

a) Encontrar (si existen) los puntos de equilibrio y dibujar el diagrama de fases.
b) Estudiar el comportamiento asintótico de la economía.

Solución:

a) $\dot{L} = 0$ admits two solutions: $L_1^0 = 0$ and $L_2^0 = \frac{\alpha}{\beta K^a}$, where K is the constant stock of capital. The trajectories grow when $L(\alpha - \beta\frac{L^a}{K^a}) > 0$ and decrease otherwise, that is, when $L > 0$, they grow when $L(t) < L_2^0$ and decreases when $L(t) > L_2^0$.

b) By the item above, $L = 0$ is unstable and every trajectory with $L(0) > 0$ converges to $L_2^0 = \frac{\alpha}{\beta K^a}$. This is the long run value of the labor force in this economy.

6-6. *Cinco estudiantes con gripe regresan tras las vacaciones de Navidad al campus de su universidad, donde hay en total 2500 estudiantes (contando los cinco protagonistas). El ritmo de contagio de la gripe es proporcional al número de estudiantes infectados, y y al número de no infectados, $2500 - y$. Resolver la ecuación*

$$\dot{y} = ky(2500 - y), \qquad y(0) = 5$$

para hallar el número de estudiantes infectados después de transcurridos t días, si se sabe que en el primer día ya había 25 estudiantes con gripe. ¿Cuántos estudiantes tendrán la gripe al cabo de cinco días? Determinar el tiempo necesario para que la mitad del campus enferme.

Solución: The equation

$$\dot{y} = ky(a - y)$$

is separable ($a = 2500$). To find the solution we separate variables and integrate as follows

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y(a-y)} &= k\,dt,\\
\int \frac{dy}{y(a-y)} &= k\,dt = kt + C',\\
\int \frac{1}{ay} + \frac{1}{a(a-y)}\,dy &= kt + C',\\
\frac{1}{a}\ln\frac{y}{a-y} &= kt + C',\\
\frac{y}{a-y} &= Ce^{akt}, \qquad \text{(the constant } C = C'e^{ak}\text{)},
\end{aligned}$$

from which

(2)
$$y(t) = \frac{aCe^{akt}}{1 + Ce^{akt}} = \frac{2500Ce^{2500kt}}{1 + Ce^{2500kt}}.$$

The initial condition gives from (2) $C = \frac{5}{2500-5} = \frac{1}{499}$ and $y(1) = 25$ is again used in (2) to determine the constant k:

$$\frac{25}{2500 - 25} = \frac{1}{499}e^{2500k} \Rightarrow k = \frac{1}{2500}\ln\frac{499}{99} \approx 0{,}000647.$$

The solution is thus,

$$y(t) = \frac{5{,}01e^{1{,}617490t}}{1 + 0{,}002e^{1{,}61749t}}.$$

Now,

$$y(5) \approx 2176 \quad \text{students.}$$

For half the campus to be infected the time elapsed must satisfy $y(t) = 1250$. After solving for t one gets $t \approx 3{,}84$ days.