MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA – 2014/2015

Hoja 6. Ecuaciones Diferencales (2)

6-1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

(a) $\dot{x} = \frac{t^3}{x^3}$.
(b) $\dot{x} = \frac{x^3}{t^3}$.
(c) $y' = \frac{\sqrt{x+1}}{y^2}$, con $y(0) = \frac{5}{3}$.
(d) $(t + 3x)\, dt + (t - 20)\, dx = 0$.
(e) $(2xy - \cos x)\, dx + (x^2 - 1)\, dy = 0$, con $y(0) = 0$.
(f) $\dot{x} + 2tx = \cos t e^{-t^2}$, con $x(0) = 0$.
(g) $\dot{x} + \frac{x}{t} = e^{-t^2}$.

6-2. La ecuación

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^n$$

se denomina *ecuación de Bernoulli.* Es lineal para $n = 0$ o $n = 1$, es no lineal para $n \neq 0, 1$. Supondremos que $n \neq 0, 1$.

(a) Probar que el cambio de variable $y = x^{1-n}$ transforma la ecuación en una lineal para $y(t)$.
(b) Resolver $\dot{x} + 2x = x^3$, $x(0) = 2$.

6-3. Dibujar el diagrama de fases de las dos siguientes ecuaciones, hallar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad.

(a) $\dot{x} = f(x) = (x + 1)(x - 1)^2(x - 2)$.
(b) $\dot{x} = g(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

6-4. En estado natural, la evolución de la población y de una cierta especie de pescado en una determinda área marítima está descrita por la ecuación logística (o de Verhulst)

$$\dot{y} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y.$$

La pesca de esta especie se dedica a la alimentación. Se supone que la tasa de capturas, $E(y)$, es proporcional a la población existente y. Es decir, $E(y) = Ey$, con E una constante positiva. Entonces, debido a las capturas, la población se rige por la ecuación

$$\dot{y} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey.$$

Esta ecuación se conoce como *modelo de Schaefer.*

(a) Probar que si $E < r$, entonces existen dos puntos de equilibrio, y_1=0, $y_2 > 0$;
(b) Mostrar que y_1 es inestable y que y_2 es asintóticamente estable.
(c) Se dice que Y es un rendimiento sostenible de la pesquería si Y es una tasa de capturas que puede mantenerse indefinidamente sin que se extinga la población. Se define como Ey_2. Hallar Y como función del esfuerzo de pesca E y dibujar dicha función (se conoce como curva de esfuerzo–rendimiento).
(d) Determinar E que maximiza Y y encontrar el *el rendimiento sostenible máximo* Y_m.

6-5. Se considera el siguiente modelo de crecimiento económico, debido a Haavelmo. El output de la economía viene dado por una función de producción de Cobb–Douglas que presenta rendimientos cosntantes a escala

$$Y = F(K, L) = AK^aL^{1-a}, \qquad 0 < a < 1,$$

donde K es el stock de capital y L es el nivel de ocupación laboral; la constante es en general $A > 0$, pero tomaremos aquí $A = 1$. Se supone que la tasa a la que se aumenta la fuerza laboral ocupada no es constante, sino que está dada por una función creciente del output per capita, Y/L:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \alpha - \beta\frac{L}{Y} = \alpha - \beta\frac{1}{Y/L}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Observar que el stock de capital, K, se considera *constante*. Substituyendo Y en (1) obtenemos la ecuación

$$\dot{L} = \alpha L - \beta\frac{L^{1+a}}{K^a}, \qquad L(0) = L_0 > 0. \tag{1}$$

(a) Encontrar (si existen) los puntos de equilibrio y dibujar el diagrama de fases.
(b) Estudiar el comportamiento asintótico de la economía.

6-6. Cinco estudiantes con gripe regresan tras las vacaciones de Navidad al campus de su universidad, donde hay en total 2500 estudiantes (contando los cinco protagonistas). El ritmo de contagio de la gripe es proporcional al número de estudiantes infectados, y y al número de no infectados, $2500 - y$. Resolver la ecuación

$$\dot{y} = ky(2500 - y), \qquad y(0) = 5$$

para hallar el número de estudiantes infectados después de transcurridos t días, si se sabe que en el primer día ya había 25 estudiantes con gripe. ¿Cuántos estudiantes tendrán la gripe al cabo de cinco días? Determinar el tiempo necesario para que la mitad del campus enferme.