TEMAS DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

Hoja 5. Ecuaciones Diferenciales (1)

Soluciones

5-1. *¿Es* $\dot{x}(t) = x(t^2)$ *una ecuación diferencial ordinaria?*

Solución: No, es una ecuación funcional.

5-2. *Verifica que* $x(t) = \pm\sqrt{\ln(C(t^2+1))}$, *donde* C *es una constante positiva, es solución de*

$$\dot{x}(t) = \frac{t}{x(t)(t^2+1)}.$$

Solución: Se comprueba derivando y substituyendo en la ecuación.

5-3. *Escribe la ecuación de orden dos*

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = c(t)$$

como un sistema de primer orden.

Solución: Sea $y = \dot{x}$. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -a(t)y - b(t)x + c(t). \end{aligned}$$

5-4. *Está nevando con regularidad. A las 12 a.m. una máquina quitanieves comienza a quitar la nieve. La máquina avanza 2 km. en la primera hora y sólo 1 km. en la segunda. Sabiendo que la máquina quitanieves quita una cantidad constante de nieve por unidad de tiempo, ¿a qué hora comenzó a nevar?*

Solución: Sea $x(t)$ el espacio recorrido por la máquina quitanieves (en km.). De la Física elemental sabemos que la velocidad es la derivada del espacio recorrido, $v(t) = \dot{x}(t)$. Las condicinoes del problemas establecen que la velocidad de la máquina quitanieves es inversametne proporcional a la altura de la nieve acumulada en el tiempo t, $h(t)$. Pero, dado que nieva de forma regular, la cantidad de nieves acumulada es proporcional al tiempo transcurrido, $h(t) = k_1 t$, con $k_1 > 0$. Por tanto,

$$\dot{x}(t) = v(t) = \frac{k_2}{h(t)} = \frac{k_2}{k_1 t}, \qquad k_2 > 0.$$

Esta EDO simple tiene como solución la función

$$x(t) = k \ln t + C, \qquad k = \frac{k_2}{k_1}.$$

Si definimos T el lapso de tiempo trasncurrido desde que empezó a nevar hasta las 12:00 am, entonces tenemos los siguientes datos que permiten hallat T:

$$\begin{gathered} t = T \Rightarrow x(T) = 0 = k \ln T + C, \\ t = T+1 \Rightarrow x(T+1) = 2 = k \ln(T+1) + C, \\ t = T+2 \Rightarrow x(T+2) = 3 = k \ln(T+2) + C. \end{gathered}$$

Substituyendo $C = -k \ln T$ las dos ecuaciones restantes tenemos

$$2 = k(\ln(T+1) - \ln(T)) = k \ln\left(\frac{T+1}{T}\right),$$
$$3 = k(\ln(T+2) - \ln(T)) = k \ln\left(\frac{T+2}{T}\right),$$

Dividiendo ambas ecuaciones para eliminar k, llegamos a

$$2 \ln\left(\frac{T+2}{T}\right) = 3 \ln\left(\frac{T+1}{T}\right),$$

o

$$\left(\frac{T+2}{T}\right)^2 = \left(\frac{T+1}{T}\right)^3.$$

Finalmente, encontramos una ecuación para T:

$$T(T^2 + 4T + 4) = T^3 + 3T^2 + 3T + 1$$

o

$$T^2 + T - 1 = 0.$$

Resolviendo obtenemos $T = 0,618\ldots$ horas, es decir, 37 minutos y 5 segundos aproximadamente; por tanto, empezó a nevar a las $11:22:55$ am.

5-5. *Encontrar la solución de los siguientes problemas:*

a) $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x(1+e^t)}$.

b) $\dot{x} = e^{t-x}$, $x(0) = 1$.

Solución:

Ambas ecuaciones son separables.

a)

$$\dot{x}x = \frac{e^t}{(1+e^t)}$$
$$\int x\,dx = \int \frac{e^t\,dt}{(1+e^t)}$$
$$\frac{x^2}{2} = \ln(1+e^t) + C.$$

b)

$$\dot{x}e^x = e^t$$
$$\int e^x\,dx = \int e^t\,dt$$
$$e^x = e^t + C$$
$$x(t) = \ln(e^t + C).$$

Substituyendo $x(0) = 1$ en la expresión anterior, tenemos

$$1 = \ln(1+C).$$

Por tanto, $C = e - 1$ and thus $x(t) = \ln(e^t + e - 1)$.

5-6. *Probar que una ecuación separable es exacta.*

Solución: La EDO $P\,dt + Q\,dx = 0$ es exacta sii $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial t$. Una ecuación separable

$$\dot{x} = g(t)h(x)$$

puede reescribirse como

$$-g(t)\,dt + \frac{dx}{h(x)} = 0.$$

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial x} g(t) = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{h(x)},$$

la condición para ser exacta se verifica.

5-7. *Resolver las ecuaciones.*
a) $(\alpha t + \beta x)\,dt + (\beta t + \gamma x)\,dx = 0$.
b) $(-2tx^3 + t\ln t)\,dt - (3t^2x^2)\,dx = 0$.

Solución: Ambas ecuaciones son exactas.
a) Sabemos que

$$V(t,x) = \int P\,dt = \int \alpha t + \beta x\,dt = \alpha\frac{t^2}{2} + \beta tx + \psi(x).$$

Por tanto

$$V_x = \beta t + \psi'(x).$$

Por otra parte, $V_x = Q = \beta t + \gamma x$, luego

$$\psi'(x) = \gamma x \Rightarrow \psi(x) = \gamma\frac{x^2}{2}.$$

Finalmente, la solución está dada implícitamente por $V(t,x(t)) = C$, es decir,

$$\alpha\frac{t^2}{2} + \beta tx(t) + \gamma\frac{x^2}{2} = C$$

es la solución general.
b)

$$V(t,x) = \int Q\,dx = -3\int t^2x^2\,dx = -t^2x^3 + \psi(t),$$

luego

$$V_t = -2tx^3 + \psi'(t).$$

Por otra parte, $V_t = P = -2tx^3 + t\ln t$, de donde

$$\psi'(t) = t\ln t.$$

Mediante una integración por partes tenemos $\psi(t) = \int t\ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4}$.
Integración por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Tomamos $u = \ln t$ y $dv = t\,dt$. Entonces, $du = dt/t$ y $v = t^2/2$, etc.

5-8. *Se consideran las siguientes funciones de oferta y demanda: $Q_s(P) = P - 6$, $Q_d(P) = 15 - 2P$. El precio es una función del tiempo, $P(t)$, cuya variación instantánea viene dada por*

$$\dot{P} = 2(Q_d(P) - Q_s(P)).$$

Calcula $P(t)$, el precio y la cantidad de equilibrio y estudia si el precio converge al precio de equilibrio en el largo plazo.

Solución: $P^* = 7$, $Q^* = 1$, $P(t) = 7 + Ce^{-6t}$, $C \in \mathbb{R}$. El precio converge a P^*.